الاشتقاق وتطبيقاته

الوحدة الأولى

الاشتقاق وتطبيقاته

Differentiation and it's Applications

- آلة حاسبة رسومية
- حاسب آلي مزود ببرامج رسومية (Geogebra, Graph)

مخطط تنظيمي للوحدة

منتدى توجيه الرياضيات

أ/ عادل إدوار

الصف الثالث الثانوى

من قواعد الاشتقاق

إذا كانت قاعدة الدالة هى : ص = د(س) فإن المشتقة الأولى للدالة بالنسبة الى س هى

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = د/ (س) = ص/ = $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ د(س) وتسمى أيضاً

⊙ ميل المماس للمنحنى ⊙ المعامل التفاضلى الأول

⊙ ظل الزاوية التى يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

⊙ معدل تغير الدالة

تذكر قواعد الاشتقاق

د(س)	د/(س)	د(س)	د/(س)
أ (أ ∈ ح)	صفر	جا س (س^{ء})	جتا س
س^{ن} (ن ∈ ح)	ن س$^{ن-1}$	جتا س (س^{ء})	ـ جا س
أ س^{ن} (أ ، ن ∈ ح)	أ × ن س$^{ن-1}$	ظا س (س^{ء})	قا^{2} س

(٢) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د(س) ± ر(س)] = د/(س) ± ر/(س)

(٣) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [د(س) × ر(س)] = ر/(س) د(س) + د/(س) ر(س)

مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الثانية × الأولى + مشتقة الأولى × الثانية

(٤) $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ [$\frac{\text{د(س)}}{\text{ر(س)}}$] = $\frac{\text{ر/(س) د(س) ـ د/(س) ر(س)}}{(\text{ر(س)})^{2}}$

مشتقة خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{مشتقة المقام × البسط + مشتقة البسط × المقام}}{\text{مربع المقام}}$

(٥) قاعدة التسلسل إذا كانت ص = د(ع) ، ع = ر (س) فإن $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}}$ × $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

(٦) إذا كان $\text{ص} = [\text{د(س)}]^{\text{ن}}$ فإن $\text{ص}' = \text{ن}\,[\text{د(س)}]^{\text{ن}-١} \times \text{د}'\text{(س)}$

(٧) حالة خاصة مشتقة الجذر التربيعى $= \dfrac{\text{مشتقة ماتحت الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

مثـال ١ أوجد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت

(أ) $\text{ص} = ٥\,\text{س}^٣ - ٣\text{س}^٢ + \text{س} + ٤$ $\quad \therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١٥\,\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ١$

(ب) $\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}^٢} - ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + \dfrac{١}{\text{س}} + ٤ = \text{س}^{\frac{٢}{٣}} - ٢\,\text{س}^{\frac{١}{٣}} + \text{س}^{-١} + ٤$

$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{٢}{٣}\,\text{س}^{-\frac{١}{٣}} - ٢ \times \dfrac{١}{٣}\,\text{س}^{-\frac{٢}{٣}} - \text{س}^{-٢}$

$= \dfrac{٢}{٣}\,\text{س}^{-\frac{١}{٣}} - \dfrac{٢}{٣}\,\text{س}^{-\frac{٢}{٣}} - \dfrac{١}{\text{س}^٢}$

(جـ) $\text{ص} = (\text{س}^٣ - ٣)(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١)$

∵ مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الثانية × الأولى + مشتقة الأولى × الثانية

$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = (٢\text{س} + ٢)(\text{س}^٣ - ٣) + ٣\text{س}^٢(\text{س}^٢ + ٢\text{س} + ١)$

(د) $\text{ص} = \dfrac{٣\,\text{س}^٢ + ٧\text{س}}{\text{س}^٢ - ٣}$

∵ مشتقة خارج قسمة دالتين $= \dfrac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} + \text{مشتقة البسط} \times \text{المقام}}{\text{مربع المقام}}$

$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \dfrac{٢\text{س}(٣\text{س}^٢ + ٧\text{س}) - (٦\text{س} + ٧)(\text{س}^٢ - ٣)}{(\text{س}^٢ - ٣)^٢} = \dfrac{٧\text{س}^٢ + ١٨\text{س} + ٢١}{(\text{س}^٢ - ٣)^٢}$

(هـ) $\text{ص} = (\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ١)^٩$ مشتقة القوس × مشتقة مابداخل القوس

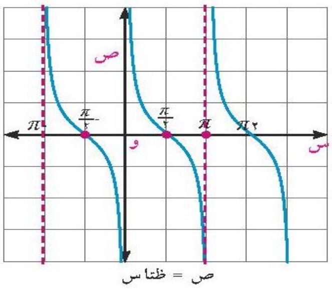
$\therefore \dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٩(\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ١)^٨ \times (٢\text{س} + ٥)$

(و) $\text{ص} = \sqrt{٣\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١}$

مشتقة الجذر التربيعى $= \dfrac{\text{مشتقة ماتحت الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}} = \dfrac{٦\text{س} + ٢}{٢ \times \sqrt{٣\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١}} = \dfrac{٣\text{س} + ١}{\sqrt{٣\text{س}^٢ + ٢\text{س} - ١}}$

(١) مشتقة الدوال المثلثية

(١) مشتقة دالة ظل التمام   ص = ظتا س



ص = ظتا س

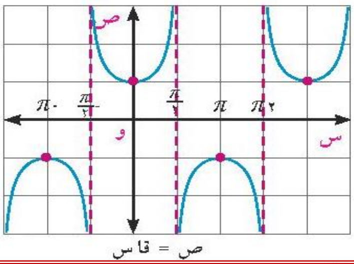
ص = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$ حيث س ∈ ح ، س ≠ ن π

فإن $\frac{د}{دس}\left(\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\right) = \frac{-\text{جتا س جتا س} - \text{حا س جاس}}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{-١}{\text{جا}^{٢}\text{ س}} = -\text{قتا}^{٢}\text{ س}$

$$\frac{د}{دس}(\text{ظتا س}) = -\text{قتا}^{٢}\text{ س}$$

(٢) مشتقة دالة القاطع   ص = قا س



ص = قا س

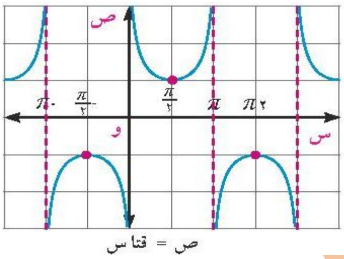
ص = $\frac{١}{\text{جتاس}}$ حيث س ∈ ح ، س ≠ $\frac{(٢ن + ١)\pi}{٢}$

فإن $\frac{د}{دس}\left(\frac{١}{\text{جتاس}}\right) = \frac{\text{حا س} \times ١ - \text{صفر}}{\text{جتا}^{٢}\text{ س}}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{\text{حا س}}{\text{جتا س}} \times \frac{١}{\text{جتاس}} = $ قاس ظاس

$$\frac{د}{دس}(\text{قا س}) = \text{قا س ظا س}$$

(٣) مشتقة دالة قاطع التمام   ص = قتا س



ص = قتا س

ص = $\frac{١}{\text{جاس}}$ حيث س ∈ ح ، س ≠ ن π

فإن $\frac{د}{دس}\left(\frac{١}{\text{جاس}}\right) = \frac{-\text{حتا س} \times ١ - \text{صفر}}{\text{جا}^{٢}\text{ س}}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{\text{حتا س}}{\text{جا س}} \times \frac{-١}{\text{جاس}} = -$ قتاس ظتاس

$$\frac{د}{دس}(\text{قتا س}) = -\text{قتاس ظتا س}$$

مثـال ٢ : أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كانت

ⓐ ص = ٢ جا س − ٣ ظتا س   ∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٢ جتا س + ٣ قتا^{٢}س

ⓑ ص = جتا س + ٤ قا س   ∴ $\frac{دص}{دس}$ = − جا س + قا س ظا س

ⓒ ص = قا س ظا س   ∵ مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الثانية × الأولى + مشتقة الأولى × الثانية

∴ $\frac{دص}{دس}$ = قا س قا^{٢}س + ظا س قا س ظا س = قا س (قا^{٢}س + ظا^{٢}س)

مثـ٣ـال : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت

(أ) ص = قتا س ظتا س ∵ مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الثانية × الأولى + مشتقة الأولى × الثانية

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قتا س × ـ قتا² س + ظتا س × ـ قتا س ظتا س = ـ قتا س (قتا² س + ظتا² س)

(ب) ص = $\frac{\text{قا س}}{\text{١ + قا س}}$

∵ مشتقة خارج قسمة دالتين = $\frac{\text{مشتقة المقام × البسط + مشتقة البسط × المقام}}{\text{مربع المقام}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(١ + قاس) × قاس ظا س ـ قاس × قاس ظا س}}{\text{(١ + قا س)}^{٢}}$ = $\frac{\text{قا س ظا س (١ + } \cancel{\text{قا س ـ قا س}}\text{)}}{\text{(١ + قا س)}^{٢}}$

(جـ) ص = $\frac{\text{١ ـ قتا س}}{\text{١ + قتا س}}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{(١ + قتا س) × قتا س ظتا س + (١ ـ قتا س) × قتا س ظتا س}}{\text{(١ + قتا س)}^{٢}}$

= $\frac{\text{قتا س ظتا س (١ + قتا س + ١ ـ قتا س)}}{\text{(١ + قتا س)}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ قتا س ظتا س}}{\text{(١ + قتا س)}^{٢}}$

مثـ٤ـال : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت

(أ) ص = س³ ـ ٢ قا س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ س² ـ ٢قاس ظا س

(ب) ص = قتا (٢ ـ ٣س)

∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ د[ر(س)] = د/ [ر(س)] × ر/ (س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ قتا (٢ـ٣س) ظتا (٢ـ٣س) × ـ ٣ = ٣+ قتا (٢ـ٣س) ظتا (٢ـ٣س)

(جـ) ص = ظتا (π ـ س⁻¹) ∵ $\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}$ د[ر(س)] = د/ [ر(س)] × ر/ (س)

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ قتا² (π ـ س⁻¹) × $\frac{\text{ـ(ـ١)}}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{\text{ـ ١}}{\text{س}^{٢}}$ × قتا² (π ـ س⁻¹)

مثـ٥ـال : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت

مشتقة ما بداخل القوس

(أ) ص = ظا (ظتا س) ∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} (ظتا س) × ـ قتا^{٢} س

(ب) ص = (١+ ظتا س)^{٢}

∵ $\frac{ء}{ءس}$ د[ر(س)] = د$^{/}$ [ر(س)] × ر$^{/}$(س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ (١ + ظتا س) × ـ قتا^{٢} س = ـ٢قتا^{٢} س (١+ ظتا س)

(جـ) ص = قتا (π ـ ٢س) ∵ $\frac{ء}{ءس}$ د[ر(س)] = د$^{/}$ [ر(س)] × ر$^{/}$(س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ قتا (π ـ ٢س) × ظتا (π ـ ٢س) × ـ٢

= ٢ قتا (π ـ ٢س) × ظتا (π ـ ٢س)

مثـ٦ـال : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت

(أ) ص = جتا ٢س ـ ٥ ظتا٣س

∵ $\frac{ء}{ءس}$ د[ر(س)] = د$^{/}$ [ر(س)] × ر$^{/}$(س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ جا (٢ س) × ٢ + ٥ قتا^{٢} ٣س × ٣ = ـ ٢جا (٢ س) + ١٥قتا^{٢} ٣س

(ب) ص = ظا ٣س ـ قتا٢ س

∵ $\frac{ء}{ءس}$ د[ر(س)] = د$^{/}$ [ر(س)] × ر$^{/}$(س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا^{٢} ٣س × ٣ + قتا س ظتا س × ٢ = ٣قتا^{٢} ٣س+٢قتا ٢س ظتا ٢س

(جـ) ص = جا^{٢} ٣س + قا^{٢} س

∵ $\frac{ء}{ءس}$ د[ر(س)] = د$^{/}$ [ر(س)] × ر$^{/}$(س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٢ جا ٣س × ٣ +٢قا س × قا س ظا س= ٦ جا ٣س +٢قا^{٢}س ظا س

مثـــال ٧ : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت

(أ) ص = ظتا (س^{٢} + ٣) ∵ $\frac{ء}{ءس}$ د[ر(س)] = د$'$ [ر(س)] × ر$'$(س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ قتا^{٢} (س^{٢} + ٣) × ٢ س = ـ ٢س قتا^{٢} (س^{٢} + ٣)

(ب) ص = قتا$\sqrt{س ـ ٢}$ ∵ $\frac{ء}{ءس}$ د[ر(س)] = د$'$ [ر(س)] × ر$'$(س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ قتا$\sqrt{س ـ ٢}$ ظتا$\sqrt{س ـ ٢}$ × $\frac{١}{٢\sqrt{س ـ ٢}}$ = $\frac{ـ ١}{٢\sqrt{س ـ ٢}}$ قتا$\sqrt{س ـ ٢}$ ظتا$\sqrt{س ـ ٢}$

(جـ) ص = جا(قتا٣ س^{٢}) ∵ $\frac{ء}{ءس}$ د[ر(س)] = د$'$ [ر(س)] × ر$'$(س)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ جتا (قتا٣س^{٢}) × ـ قتا ٣س^{٢} ظتا ٣س^{٢} × ٦س

= ٦س جتا (قتا٣س^{٢}) × قتا ٣س^{٢} ظتا ٣س^{٢}

مثـــال ٨ : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت

(أ) ص = ٣ قا ٢س + ٢ قتا ٣س

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ٣قا٢س ظا ٢س × ٢ ـ ٢ قتا٣س ظا ٣س × ٣

= ٦ (قا٢س ظا ٢س ـ قتا٣س ظا ٣س)

(ب) ص = ـ قتا^{٣} (٢ س+ π)

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ٣ قتا^{٢}(٢ س+ π) × ـ قتا (٢ س+ π) ظتا (٢ س+ π) × ٢

=٦ قتا^{٢}(٢ س+ π) × قتا (٢ س+ π) ظتا (٢ س+ π)

(جـ) ص = س^{٢} قا $\frac{١}{س}$ ∵ مشتقة حاصل ضرب دالتين = مشتقة الثانية × الأولى + مشتقة الأولى × الثانية

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = س^{٢} × قا $\frac{١}{س}$ ظا $\frac{١}{س}$ × $\frac{ـ١}{س^{٢}}$ + قا $\frac{١}{س}$ × ٢س

= قا $\frac{١}{س}$ (ظا $\frac{١}{س}$ + ٢س)

مثـــال ٩ : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت

أ) ص = قا س ظا ٢س

$\therefore \frac{ءص}{ءس}$ = قاس × قا^{٢} ٢س×٢+ ظا٢س × قا س ظا س (مشتقة حاصل ضرب دالتين)

= قا س (٢قا^{٢} ٢س + ظا٢س ظا س)

ب) ص = ظتا^{٣} $\sqrt{س}$

بفرض ع = $\sqrt{س}$ ⟸ $\frac{ءع}{ءس} = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$ ، ص = ظتا^{٣}ع ⟸ $\frac{ءص}{ءع}$ = ـ ٣ ظا^{٢}ع قتا^{٢}ع

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ = ـ ٣ظتا^{٢}ع قتا^{٢}ع × $\frac{١}{٢\sqrt{س}} = \frac{-٣}{٢\sqrt{س}}$ ظتا^{٢} $\sqrt{س}$ قتا^{٢} $\sqrt{س}$

جـ) ص = قتا^{٢} (١ + س^{٢})

بفرض ع = (١ + س^{٢}) ⟸ $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢س

، ص = قتا^{٢}ع ⟸ $\frac{ءص}{ءع}$ = ـ ٢ قتاع قتاع ظتا ع

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ = ـ ٢ قتاع قتاع ظتا ع × ٢س

= ـ ٤ س قتا^{٢} (١ + س^{٢}) ظتا (١ + س^{٢})

مثـــال ١٠ : أوجد $\frac{ءص}{ءس}$ إذا كانت

أ) ص = ٣ قا^{٢} (٢س + π) (مشتقة دالة الدالة)

$\therefore \frac{ءص}{ءس}$ = ٣ ×٢ قا(٢س + π) × قا(٢س + π) ظا (٢س + π) × ٢

= ١٢× قا^{٢} (٢س + π) ظا (٢س + π)

ب) ص = $\sqrt{١+ قتا س}$

بفرض ع = ١+ قتا س ⟸ $\frac{ءع}{ءس}$ = ـ قتا س ظتا س

، ص = $\sqrt{ع}$ ⟸ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{١}{٢\sqrt{ع}}$

$\therefore \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$ = ـ قتا س ظا س × $\frac{١}{٢\sqrt{ع}}$ = $\frac{\text{ـ قتا س ظتا س}}{٢\sqrt{١+\text{قتاس}}}$

(جـ) ص = س^{٢} ظتا ٣س

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢س × ظتا س + ٣ قا^{٢} ٣س × س^{٢} (مشتقة حاصل ضرب دالتين)

= ٢س × ظتا س + ٣ س^{٢} قا^{٢} ٣س

مثـال ١١ : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ إذا كانت

(أ) ص = (قتا س + ظتا س)$^{-١}$

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = -١(قتا س + ظتا س)$^{-٢}$ (- قتا س ظتا س - قتا^{٢} س) (مشتقة دالة الدالة)

= قتا س(قتا س + ظتا س)$^{-٢}$ (ظتا س + قتا س) = $\frac{\text{قتا س}}{\text{قتاس + ظتاس}}$

(ب) ص = $\frac{\text{ظتا ٣س}}{\text{٢س + ٣}}$ (مشتقة خارج قسمة دالتين)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٣(٢س + ٣) × - قتا}^{٢}\text{ ٣س - ٢ ظتا ٣س}}{\text{(٢س + ٣)}^{٢}}$

(جـ) ص = $\frac{\text{١ - قا س}}{\text{١ + قا س}}$ (مشتقة خارج قسمة دالتين)

∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{(١ + قا س) × - قا س ظا س - (١ - قا س) × قا س ظا س}}{\text{(١ + قا س)}^{٢}}$

= $\frac{\text{قا س ظا س(-١ - قا س - ١ + قا س)}}{\text{(١ + قا س)}^{٢}}$ = $\frac{\text{-٢قا س ظا س}}{\text{(١ + قا س)}^{٢}}$

مثـال ١٢ : إذا كانت ص = ظتا $\frac{\pi}{٦}$ ع ، ع = $\sqrt{\text{٣س}}$ أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند س = ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ = - $\frac{\pi}{٦}$ قتا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ع ، $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = $\frac{٣}{٢\sqrt{\text{س}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دع}}$ × $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ = - $\frac{\pi}{٦}$ قتا^{٢} $\frac{\pi}{٦}$ع × $\frac{٣}{٢\sqrt{\text{س}}}$ عند س = ١

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = - $\frac{\pi}{٤}$ قتا^{٢} ٣٠ × $\sqrt{٣}$ = - $\frac{\pi}{٤}$ قتا^{٢} ٩٠ = - $\frac{\pi}{٤}$

مثـ ١٣ ـال إذا كانت ص = $\sqrt{\text{٥ ـ ٢ع}}$ ، ع = قا٢س

أثبت أن $\sqrt{٣}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ١٢ = ٠$ عندما س = $\frac{\pi}{٦}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = \frac{-٢}{٢\sqrt{\text{٥ـ٢ع}}} = \frac{-١}{\sqrt{\text{٥ـ٢ قا٢س}}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{٢ قا٢س ظا٢س}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\sqrt{\text{٥ـ٢ قا٢س}}} \times \text{٢ قا٢س ظا٢س}$ عند س = $\frac{\pi}{٦}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-١}{\sqrt{\text{٥ـ٢قا٦٠}}} \times \text{٢ قا٦٠ ظا٦٠} = \frac{-١}{\sqrt{٥-٢\times٢}} \times ٢ \times ٢ \times \sqrt{٣}$

$\therefore \sqrt{٣}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ١٢ = -٢\times٢\times\sqrt{٣}\times\sqrt{٣} + ١٢ = -١٢ + ١٢ = \text{صفر}$

مثـ ١٤ ـال أوجد ميل المماس لمنحنى الدالة د حيث ص = د(س)

(أ) ص = ٢ظتاس + $\sqrt{٢}$ قا س حيث س = $\frac{\pi}{٤}$

(ب) ص = ٣ ظاس ـ قتا^{٢}س حيث س = $\frac{٣\pi}{٤}$

(أ) م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ٢ قتا^{٢}س + $\sqrt{٢}$ قا س ظا س عندما س = $\frac{\pi}{٤}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ٢ قتا^{٢} ٤٥° + $\sqrt{٢}$ قا ٤٥° ظا ٤٥° = ـ٢ × $(\sqrt{٢})^{٢}$ + ٢ × ١ = ـ٢

(ب) م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ قا^{٢}س ـ ٢قتاس × ـ قتا س ظتا س = ٣ قا^{٢}س ـ٢قتا^{٢}س ظتا س

عند : س = $\frac{٣\pi}{٤}$

$\therefore$ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ ×$(-\sqrt{٢})^{٢}$ ـ ٢×$(-\sqrt{٢})^{٢}$×١ = ٦ ـ ٤ = ٢

---

(٢) الاشتقاق الضمنى البارامترى

اشتقاق العلاقة الضمنية د(س ، ص) = ٠ يتطلب اشتقاق كل من طرفى العلاقة بالنسبة لأحد المتغيرين س أ، ص وفقاً لقاعدة السلسة لنحصل على $\frac{دص}{دس}$ أ، $\frac{دس}{دص}$ على الترتيب

مثـ١ـال : أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كانت

(أ) $س^{٣} - ٥\,س\,ص + ص^{٣} = ٤س$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$٣\,س^{٢} - ٥س\,\frac{دص}{دس} - ٥\,ص + ٣\,ص^{٢}\,\frac{دص}{دس} = ٤$$

$$\frac{دص}{دس}\,(٣\,ص^{٢} - ٥\,س) = ٤ + ٥\,ص - ٣س^{٢} \quad \therefore \frac{دص}{دس} = \frac{٤ + ٥\,ص - ٣س^{٢}}{٣\,ص^{٢} - ٥\,س}$$

(ب) $س^{٢}\,ص + ص^{٢}\,س = ٢٥$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$س^{٢}\,\frac{دص}{دس} + ٢\,س\,ص + ص^{٢} + س\,ص\,\frac{دص}{دس} = ٠$$

$$\frac{دص}{دس}\,(س^{٢} + س\,ص) = -ص^{٢} - ٢س\,ص \quad \therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-(ص^{٢} + ٢س\,ص)}{س^{٢} + س\,ص}$$

مثـ٢ـال : أوجد $\frac{دص}{دس}$ إذا كانت

(أ) $س^{٢} + ٤ص^{٢} + ٧ = ٠$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$٢\,س + ٨\,ص\,\frac{دص}{دس} = ٠ \Longleftarrow ٨\,ص\,\frac{دص}{دس} = -٢س$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-٢س}{٨\,ص} = \frac{-س}{٤ص}$$

(ب) $س^{٤} + ٣ص^{٤} - ٢ = ٠$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$٤س^{٣} + ١٢\,ص^{٣}\,\frac{دص}{دس} = ٠ \Longleftarrow ١٢\,ص^{٣}\,\frac{دص}{دس} = -٤س^{٣}$$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{-٤س^{٣}}{١٢\,ص^{٣}} = \frac{-س^{٣}}{٣\,ص^{٣}}$$

مثـ٣ـال : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت

(أ) $\text{س}^{٢}$ ـ ٢ س ص = ٥ ـ $\text{ص}^{٢}$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

٢س ـ ٢ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ـ ٢ص = ـ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بالقسمة على (٢)

س ـ ص = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (س ـ ص) ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{(س ـ ص)}}{\text{(س ـ ص)}}$ = ١

(ب) س جتا ص + ص جتا س = ١ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

س × ـ جا ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + جتا ص ـ ص جا س + جتا س × $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (جتا س ـ س جا ص) = ص جا س ـ جتا ص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص جا س ـ جتا ص}}{\text{جتا س ـ س جا ص}}$

مثـ٤ـال : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت

(أ) ٣ص = جا س جتا ص باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

٣× $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = حاس × ـ حا ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + جتا ص × جتا س

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٣ + حاس حا ص) = جتا ص × جتا س ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{جتا ص جتا س}}{\text{٣ + حاس حا ص}}$

(ب) $\text{س}^{٣}$ + ٦ س ص = ٤ ص + ٣ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

٣ $\text{س}^{٢}$ + ٦ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٦ ص = ٤ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٤ ـ ٦ س) = ٣ $\text{س}^{٢}$ + ٦ص ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{٣ س}^{٢}\text{ + ٦ ص}}{\text{٤ ـ ٦ س}}$

مثـ٥ـال : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت

(أ) $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ١$ بضرب طرفى المعادلة فى س ص $\quad$ س^{٢} + ص^{٢} = س ص

باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س $\quad$ ∴ ٢ س + ٢ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (٢ص ـ س) = ص ـ ٢ س $\quad$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص ـ ٢س}}{\text{٢ص ـ س}}$

(ب) س ص + جا ص = ٥ $\quad$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص + جتا ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (س + جتا ص) = ـ ص $\quad$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ـ ص}}{\text{س + جتا ص}}$

مثـ٦ـال : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت

(أ) س جا ص + ص جتا س = ٠ $\quad$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

س جتا ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + جا ص ـ ص جا س + جتا س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (س جتا ص + جتا س) = ص جا س ـ جاص

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص جا س ـ جا ص}}{\text{س جتا ص + جتا س}}$

(ب) س قتا ص = ص ظتا س $\quad$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

ـ س قتا ص ظتا ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + قتا ص = ـ ص قتا^{٢} س + ظتا س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (س قتا ص ظتا س + ظتا س) = قتا ص + ص قتا^{٢} س

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{قتا ص + ص قتا}^{٢}\text{ س}}{\text{س قتا ص ظتا س + ظتا س}}$

مثـ٧ـال : أوجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ إذا كانت

(أ) $\text{س}^{٢}\ \text{جا ص} - \text{ص}^{٢}\ \text{جا س} = ٩$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$\text{س}^{٢}\ \text{جتا ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + ٢\ \text{س جا ص} - \text{ص}^{٢}\ \text{جتا س} - ٢\ \text{ص جا س}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٠$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\ (\text{س}^{٢}\ \text{جتا ص} - ٢\ \text{ص جا س}) = ٢\ \text{س جا ص} - \text{ص}^{٢}\ \text{جتا س}$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ص}^{٢}\ \text{جتا س} - ٢\ \text{س جا ص}}{\text{س}^{٢}\ \text{جتا ص} - ٢\ \text{ص جا س}}$$

(ب) $\text{جا ٢س جتا ٢ص} = ٤$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$$\text{جا ٢س} \times -٢\ \text{جا ٢ص}\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{جتا ٢ص} \times ٢\text{جتا ٢س} = ٠$$

$$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\ \text{جتا ٢ص جتا ٢س}}{٢\ \text{جا ٢ص جا ٢س}} = \frac{\text{جتا٢ص}}{\text{جا٢ص}} \times \frac{\text{جتا٢س}}{\text{جا٢س}} = \text{ظتا ٢س ظتا ٢ص}$$

الاشتقاق البارامترى

إن أحد العيوب الرئيسية للاشتقاق الضمنى للدالة هو كون الصيغة النهائية للمشتقة $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ تحوى كلاً من س ، ص مما يجعل حسابها شاقاً لحاجتنا لمعرفة قيمة ص المناظرة لقيمة س والتى يصعب تحديدها من العلاقة الضمنية

أما الاشتقاق البارامترى فيحدد إحداثيا النقطة (س ، ص) آنياً عند لحظة ن بواسطة دالة دالة فى متغير ن (يُسمى بالوسيط البارامتر) للمعادلتين

المنحنى المعطى على الصورة البارامترية س = د (ن) ، ص = ر(ن) يكون وهاتان المعادلاتان تكافئان معادلة واحدة كارتيزية لمنحنى ولكن فى الصورة البارامترية

$$\boxed{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \times \frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}}$$

حيث د ، ر دالتان قابلتان للاشتقاق بالنسبة إلى ن

مثـال ٨ : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$: $\text{س} = (\text{ن} + ٧)(\text{ن} - ٢)$ ، $\text{ص} = (\text{ن}^{٢} + ١)(\text{ن} - ٢)$ ، عند ن = ١

$\text{س} = \text{ن}^{٢} + ٥\text{ن} - ١٤$ $\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٢\text{ن} + ٥$ ----- (١)

$\text{ص} = \text{ن}^{٣} - ٢\text{ن}^{٢} + \text{ن} - ٢$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣\text{ن}^{٢} - ٤\text{ن} + ١$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٣\text{ن}^{٢} - ٤\text{ن} + ١}{٢\text{ن} - ١}$

عند ن = ١ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٣(١)^{٢} - ٤(١) + ١}{٢(١) + ٥} =$ صفر

مثـال ٩ : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$: $\text{س} = \text{قا}^{٢}\,\theta - ١$ ، $\text{ص} = \text{ظا}\,\theta$ ، عند $\theta = \frac{-٣\pi}{٤}$

$\text{س} = \text{قا}^{٢}\,\theta - ١$ $\therefore \frac{\text{دس}}{\text{د}\theta} = ٢\,\text{قا}\,\theta\,\text{قا}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta = ٢\,\text{قا}^{٢}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta$ -- (١)

$\text{ص} = \text{ظا}\,\theta$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} = \text{قا}^{٢}\,\theta$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{د}\theta} \div \frac{\text{دس}}{\text{د}\theta} = \frac{\text{قا}^{٢}\,\theta}{٢\,\text{قا}^{٢}\,\theta\,\text{ظا}\,\theta} = \frac{١}{٢\,\text{ظا}\,\theta}$

عند $\text{ن} = \frac{-٣\pi}{٤}$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{٢\,\text{ظا}\,(-١٣٥)} = \frac{-١}{٢}$

مثـال ١٠: أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$: $\text{س} = \sqrt{٣\text{ن} - ٢}$ ، $\text{ص} = \sqrt{٤\text{ن} + ١}$ ، عند ن = ٢

$\text{س} = \sqrt{٣\text{ن} - ٢}$ $\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣\text{ن} - ٢}}$ ----- (١)

$\text{ص} = \sqrt{٤\text{ن} + ١}$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٤}{٢\sqrt{٤\text{ن} + ١}}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{دص}}{\text{دن}} \div \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{٤}{٢\sqrt{٤\text{ن} + ١}} \times \frac{٢\sqrt{٣\text{ن} - ٢}}{٣}$

عند ن = ٢ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٤}{٣} \times \frac{\sqrt{٦ - ٢}}{\sqrt{٨ + ١}} = \frac{٤ \times ٢}{٣ \times ٣} = \frac{٨}{٩}$

مثـال ١١: أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$: س = ١٣ ـ ٢ن ، ص = ٤ن^{٢} ـ $\sqrt{\text{ن}}$ ، عند ن = ٤

س = ١٣ ـ ٢ن ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ـ٢ ----- (١)

ص = ٤ن^{٢} ـ $\sqrt{\text{ن}}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٨ن ـ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}}}$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ÷ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = (٨ن ـ $\frac{١}{٢\sqrt{\text{ن}}}$) × $\frac{-١}{٢}$

عند ن = ٤ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (٨ × ٤ ـ $\frac{١}{٤}$) × $\frac{-١}{٢}$ = ٣١٫٧٥ ÷ ـ٢ = ـ ١٥٫٨٧٥

مثـال ١٢ : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$: س = جا ٢ π θ ، ص = جتا ٢ π θ ، عند θ = $\frac{١}{٦}$

س = جا ٢ π θ ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٢ π جتا ٢π θ -- (١)

ص = جتا ٢ π θ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ـ ٢ π جا ٢π θ ---- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ÷ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = $\frac{-٢\pi \text{ جا } ٢\pi\theta}{٢\pi \text{ جتا } ٢\pi\theta}$ = ـ ظا ٢ π θ

عند ن = $\frac{١}{٦}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ـ ظا ٢ π × $\frac{١}{٦}$ = ـ ظا ٦٠° = ـ $\sqrt{٣}$

مثـال ١٣ : أوجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$: س = ٥ + قا^{٢} ٣ θ ، ص = ١ ـ ظا ٣ θ ، عند θ = $\frac{\pi}{٤}$

س = ٥ + قا^{٢} ٣ θ ∴ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = ٢ قا ٣ θ قا ٣ θ ظا ٣ θ × ٣ -- (١)

ص = ١ ـ ظا ٣ θ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ـ ٣ قا^{٢} ٣ θ ---- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ÷ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ = $\frac{-٣ \text{ قا}^{٢} ٣\theta}{٦ \text{ قا}^{٢} ٣\theta \text{ ظا } ٣\theta}$ = $\frac{-١}{٢ \text{ ظا } ٣\theta}$

عند ن = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{-١}{٢ \text{ ظا } ١٣٥^{\circ}}$ = $\frac{-١}{٢ \times -١}$ = $\frac{١}{٢}$

مثـ١٤ـال بإستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد مشتقة ٤س^{٣} ـ ٩س^{٢} + ٥ بالنسبة إلى ٣ س^{٢} + ٧

بوضع ص = ٤س^{٣} ـ ٩س^{٢} + ٥ فإن ص = د(س) ∴ ص$'$ = ١٢س^{٢} ـ ١٨س -- (١)

، ع = ٣ س^{٢} + ٧ فإن ع = د(س) ∴ ع$'$ = ٦س ---- (٢)

من (١) ، (٢) $= \frac{ص'}{ع'} = \frac{٦س(٢س ـ ٣)}{٦س} =$ ٢س ـ ٣

∴ $\frac{ء}{ء(٣س^{٢} + ٧)}$ (٤س^{٣} ـ ٩ س^{٢} +٥) = (٢س ـ ٣)

مثـ١٥ـال بإستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد مشتقة س^{٢} + ١ بالنسبة إلى $\sqrt{س^{٢} ـ ١}$

بوضع ص = س^{٢} + ١ فإن ص = د(س) ∴ ص$'$ = ٢ س -- (١)

، ع = $\sqrt{س^{٢} ـ ١}$ فإن ع = د(س) ∴ ع$'$ = $\frac{٢س}{٢\sqrt{س^{٢} - ١}}$ --- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ص'}{ع'} = \frac{٢س\sqrt{س^{٢} ـ ١}}{٢س} = \sqrt{س^{٢} ـ ١}$

∴ $\frac{ء}{ء\sqrt{س^{٢} ـ ١}}$ (س^{٢} +١) = $\sqrt{س^{٢} ـ ١}$

مثـ١٦ـال بإستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد مشتقة $\sqrt{٨ + س^{٢}}$ بالنسبة إلى $\frac{س}{س +١}$

بوضع ص = $\sqrt{٨ + س^{٢}}$ فإن ص= د(س) ∴ ص$'$ = $\frac{٢س}{٢\sqrt{٨ + س^{٢}}}$ -(١)

، ع = $\frac{س}{س +١}$ فإن ع = د(س) ∴ ع$'$ = $\frac{س + ١ ـ س}{(س +١)^{٢}}$ -- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ص'}{ع'} = \frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{٨ + س^{٢}}} \div \frac{\cancel{س} + ١ ـ \cancel{س}}{(س +١)^{٢}} = \frac{س(س +١)^{٢}}{\sqrt{٨ + س^{٢}}}$

عند س = ١ ∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{س(س +١)^{٢}}{\sqrt{٨ + س^{٢}}} = \frac{١(١ +١)^{٢}}{\sqrt{٨ + ١}} = \frac{٤}{٣}$

مثـ١٧ـال باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد مشتقة س ـ جاس بالنسبة إلى ١ ـ جتا س عند س = $\frac{\pi}{٣}$

بوضع ص = س ـ جاس فإن ص = د(س) ∴ $ص' = ١ - \text{جتا}\,س$ ----- (١)

، ع = ١ ـ جتا س فإن ع = د(س) ∴ $ع' = \text{حا}\,س$ ----- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ص'}{ع'} = \frac{١ - \text{جتا}\,س}{\text{حا}\,س}$

∴ $\frac{ء}{ء(١ - \text{جتا}\,س)}(س - \text{جا}\,س) = \frac{١ - \text{جتا}\,س}{\text{حا}\,س} = \frac{١ - \text{جتا}\,٦٠}{\text{حا}\,٦٠} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

مثـ١٨ـال باستخدام الاشتقاق البارامترى أوجد مشتقة $\frac{س+١}{س-١}$ بالنسبة إلى $\sqrt{٢س+١}$

بوضع ع = $\sqrt{٢س+١}$ فإن ص = د(س) ∴ $ع' = \frac{٢}{٢\sqrt{٢س+١}}$ -- (١)

، ص = $\frac{س+١}{س-١}$ فإن ع = د(س) ∴ $ص' = \frac{س-١-س-١}{(س-١)^٢}$ -- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ص'}{ع'} = \frac{-٢}{(س-١)^٢} \div \frac{\cancel{٢}}{\cancel{٢}\sqrt{٢س+١}} = \frac{-٢\sqrt{٢س+١}}{(س-١)^٢}$

عند س = ٤ ∴ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{-٢\sqrt{٢س+١}}{(س-١)^٢} = \frac{-٢\sqrt{٨+١}}{(٤-١)^٢} = \frac{-٢\times٣}{(٣)^٢} = \frac{-٢}{٣}$

مثـ١٩ـال أوجد ميل المماس للمنحنى جتا $\sqrt{\pi ص}$ = ٣س + ١ عند النقطة ($\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٤}$)

باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

$\frac{-\pi}{٢\sqrt{\pi ص}}\ \text{جا}\sqrt{\pi ص}\ \frac{ءص}{ءس} = ٣$ $\qquad \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٣ \times ٢\sqrt{\pi ص}}{\pi\ \text{جا}\sqrt{\pi ص}}$

عند النقطة ($\frac{-١}{٣}$ ، $\frac{\pi}{٤}$) ∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{-٣\times٢\times\frac{١}{٢}\pi}{\pi\ \text{جا}\ \frac{١}{٢}\pi} = \frac{-٣}{\text{جا}\,٩٠} = -٣$

مثـ ٢٠ ـال أوجد قيمة البارامتر ن التى عندها يكون المنحنى $\text{س} = ٢\text{ن}^{٣} - ٥\text{ن}^{٢} + ٤\text{ن} - ٩$ ، $\text{ص} = ٢\text{ن}^{٢} + \text{ن} - ٥$

أ مماس رأسى ب مماس أفقى

$\text{س} = ٢\text{ن}^{٣} - ٥\text{ن}^{٢} + ٤\text{ن} - ٩$ ∴ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٦\text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} + ٤$ -- (١)

$\text{ص} = ٢\text{ن}^{٢} + \text{ن}$ ∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٤\text{ن} + ١$ ---- (٢)

من (١) ، (٢) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} \div \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = \frac{٤\text{ن} + ١}{٦\text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} + ٤}$

أ المماس رأسى ∴ المقام $= ٦\text{ن}^{٢} - ١٠\text{ن} + ٤ = ٠$ بالقسمة على ٢ والتحليل

$(٣\text{ن} - ٢)(\text{ن} - ١) = ٠$ ⟸ $\text{ن} = ١$ ، أ $\frac{٢}{٣}$

ب المماس أفقى ∴ البسط $= ٤\text{ن} + ١ = ٠$ ⟸ $\text{ن} = \frac{-١}{٤}$

(٣) المشتقات العليا للدالة

❖ إذا كانت ص = د(س) حيث د قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن مشتقتها الأولى هى

$\text{ص}^{/} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{د}^{/}(\text{س})$ وتمثل دالة جديدة

❖ وإذا كانت المشتقة الأولى قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى س فإن مشتقتها تسمى المشتقة

الثانية $\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\right) = \frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \text{ص}^{//} = \text{د}^{//}(\text{س})$ للدالة وتمثل دالة جديدة

❖ بتكرار عملية الاشتقاق نحصل على المشتقة الثالثة $\text{ص}^{///} = \frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ وهكذا

❖ والمشتقة النونية بالرمز $\text{ص}^{(\text{ن})}$ أو $\frac{\text{ء}^{\text{ن}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{ن}}}$ حيث ن عدد صحيح موجب

مثـ ١ ـال أوجد المشتقة الثانية لكل من

أ $\text{ص} = ٢\text{س}^{٤} + ٣\text{س} - ٥$ ⟸ $\text{ص}^{/} = ٨\text{س}^{٣} + ٣$ ، $\text{ص}^{//} = ٢٤\text{س}^{٢}$

ب $\text{ص} = \sqrt{٣\text{س} - ٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٣\text{س} - ٢}}$: $\text{س} \geqslant \frac{٢}{٣}$ ، $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}} = \frac{٩}{٤\sqrt{(٣\text{س} - ٢)^{٢}}}$: $\text{س} > \frac{٢}{٣}$

مثـ٢ـال أوجد المشتقة الثالثة لكل من

(أ) ص = س^{٤} ـ ٢س^{٢} + ٥

(أ) ص$'$ = ٤ س^{٣} ـ ٤ س

، ص$''$ = ١٢ س^{٢} ـ ٤

، ص$'''$ = ٢٤ س

(ب) ص = (٢ ن ـ ١)^{٤}

(ب) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٤×٢ (٢ ن ـ ١)^{٣} = ٨ (٢ ن ـ ١)^{٣}

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = ٨× ٣×٢ (٢ ن ـ ١)^{٢} = ٤٨ (٢ ن ـ ١)^{٢}

$\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{دس}^{٣}}$ = ٤٨× ٢×٢ (٢ ن ـ ١) = ١٩٢(٢ ن ـ ١)^{٢}

مثـ٣ـال أوجد المشتقة الثالثة لكل من

(أ) ص = جتا (٢س + π)

(أ) ص$'$ = ـ٢ جا (٢س + π)

، ص$''$ = ـ٤ جتا (٢س + π)

، ص$'''$ = ٨ جا (٢س + π)

(ب) ص = $\frac{\text{س}}{\text{س ـ ١}}$

(ب) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{(س ـ ١) ـ س}}{\text{(س ـ ١)}^{٢}}$ = $\frac{\text{ـ ١}}{\text{(س ـ ١)}^{٢}}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢(س ـ ١)}}{\text{(س ـ ١)}^{٤}}$ = $\frac{٢}{\text{(س ـ ١)}^{٣}}$

$\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{دس}^{٣}}$ = $\frac{\text{ـ ٦(س ـ ١)}^{٢}}{\text{(س ـ ١)}^{٦}}$ = $\frac{\text{ـ ٦}}{\text{(س ـ ١)}^{٤}}$

مثـ٤ـال أوجد المشتقة الثالثة لكل من

(أ) ص = س^{٥} ـ ٤ س^{٣} + ٣

(أ) ص$'$ = ٥ س^{٤} ـ ١٢ س^{٢}

، ص$''$ = ٢٠ س^{٣} ـ ٢٤س

، ص$'''$ = ٦٠ س^{٢} ـ ٢٤

(ب) ص = $\frac{\text{٢س}}{\text{س + ١}}$

(ب) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٢(س ـ ١) ـ ٢س}}{\text{(س + ١)}^{٢}}$ = $\frac{\text{ـ ٢}}{\text{(س + ١)}^{٢}}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = $\frac{\text{٤(س + ١)}}{\text{(س + ١)}^{٤}}$ = $\frac{٤}{\text{(س + ١)}^{٣}}$

$\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{دس}^{٣}}$ = $\frac{\text{١٢(س + ١)}^{٢}}{\text{(س + ١)}^{٦}}$ = $\frac{١٢}{\text{(س + ١)}^{٤}}$

مثـ٥ـال أوجد المشتقة الثالثة لكل من

Ⓐ ص = جا (٢س ـ ٧)

Ⓐ ص′ = ٢ جتا (٢س ـ ٧)

، ص″ = ـ٤ جا (٢س ـ ٧)

، ص‴ = ـ ٨ جتا (٢س ـ ٧)

Ⓑ ص = جتا (π ـ ٣س)

Ⓑ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٣ جا (π ـ ٣س)

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ـ٩ جتا (π ـ ٣س)

$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ = ـ٢٧ جا (π ـ ٣س)

مثـ٦ـال أوجد المشتقة الثالثة لكل من

Ⓐ ص = جا س جتا س

Ⓐ ص= $\frac{١}{٢}$جا٢س ∴ ص′ = جتا٢س

، ص″ = ـ٢جا ٢س

، ص‴ = ـ ٤ جتا ٢س

Ⓑ ص = $\sqrt{\text{٢س ـ ٥}}$

Ⓑ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{٢}{٢\sqrt{\text{٢س ـ ٥}}}$ = (٢س ـ٥)$^{-\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ = ـ $\frac{١}{٢}$ ×٢ (٢س ـ٥)$^{-\frac{٣}{٢}}$

$\frac{\text{ء}^{٣}\text{ص}}{\text{ءس}^{٣}}$ = $\frac{٣}{٢}$×٢ (٢س ـ٥)$^{-\frac{٥}{٢}}$ = $\frac{٣}{\sqrt{(\text{٢س ـ٥})^{٥}}}$

ملاحظة هامة:

(١) $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ تقرأ دال أثنين ص دال س أثنين

(٢) يوجد اختلاف بين $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ ، ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)^{٢} فالأولى تدل على المشتقة الثانية للدالة بينما الثانية تدل على مربع المشتقة الأولى.

مثـ٧ـال إذا كانت س^{٢} + ص^{٢} = ٩ أثبت أن ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)^{٢} + ١ = ٠

∵ س^{٢} + ص^{٢} = ٩ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠ باشتقاق المعادلة بالنسبة إلى س ،، ÷ ٢

∴ ١ + ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)^{٢} = ٠ ⟸ ص $\frac{\text{ء}^{٢}\text{ص}}{\text{ءس}^{٢}}$ + ($\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$)^{٢} + ١ = ٠

مثـال ٨ إذا كانت ص = ظا س أثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = ٢ ص(١+ ص^٢)

∵ ص = ظا س باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = قا^٢ س باشتقاق المعادلة بالنسبة إلى س

∴ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = ٢ قا س قا س ظا س = ٢ قا^٢ س ظا س= ٢ (١+ ظا^٢ س) ظا س

⟸ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = ٢ ظا س (١+ ظا^٢ س) = ٢ ص(١+ ص^٢)

مثـال ٩ إذا كانت ٣س^٢ + ٥ = ٢ س ص أثبت أن س $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ = ٣

∵ ٣س^٢ + ٥ = ٢ س ص باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ ٦ س = ٢ س $\frac{دص}{دس}$ + ٢ ص باشتقاق المعادلة بالنسبة إلى س ، ÷٢

∴٦ = ٢ س $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ ⟸ س $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٢ $\frac{دص}{دس}$ = ٣

مثـال ١٠ إذا كانت س^٢ + ص^٢ = ٤ أثبت أن ص^٣ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ ـ ٤ =٠

∵ س^٢ + ص^٢ = ٤ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ ٢ س + ٢ ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠ ⟸ $\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-س}{ص}$ - - - - (١)

بالقسمة على ٢ والاشتقاق بالنسبة إلى س ∴ ١ + ص $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + $(\frac{دص}{دس})^2$ = ٠

من (١) ∴ ص $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + $(\frac{-س}{ص})^2$ + ١ = ص $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + $\frac{(-س)^2}{ص^2}$ + ١ = ٠

بالضرب × ص^٢ ∴ ص^٣ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + س^٢ + ص^٢ = ٠ ∴ ص^٣ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٤ = صفر

مثـال ١١ إذا كانت ص = ٣جا (٢س + ١) أثبت أن $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٤ ص = ٠

∵ ص = ٣ جا (٢س + ١) باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ $\frac{دص}{دس}$ = ٦ جتا (٢س + ١) باشتقاق المعادلة بالنسبة إلى س

∴ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ = ـ ١٢ جا (٢س + ١) = ـ ٤ × ص ⟸ $\frac{د^2ص}{دس^2}$ + ٤ ص = صفر

مثـــ ١٢ ـــال إذا كانت س ص = جا س جتا س أثبت أن س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤س ص = ٠

∵ س ص = جا س جتا س = $\frac{١}{٢}$ جا ٢س باشتقاق المعادلة بالنسبة إلى س

∴ س $\frac{ءص}{ءس}$ + ص = جتاس جتاس ـ جاس جاس = جتا ٢س باشتقاق إلى س

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ + $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ ٢ جا ٢ س = ـ ٤ جا س جتا س = ـ ٤ س ص

∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ س ص ∴ س $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + ٢ $\frac{ءص}{ءس}$ + ٤ س ص = ٠

مثـــ ١٣ ـــال إذا كانت ص = س جا س أثبت أن س $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص = ٠

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = س جتا س + جا س باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = جتاس ـ س جا س + جتا س = ٢جتاس ـ س جا س

∴ $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ = ـ ٢ جا س + س جتا س ـ جاس = س جتا س ـ ٣جاس بالضرب × س

∴ س $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ + س(س جتا س + س جاس) + ٢ س جا س = ٠

∴ س $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ + س $\frac{ءص}{ءس}$ + ٢ ص = صفر

مثـــ ١٤ ـــال إذا كانت ص = قا س أثبت أن ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = ص^٢(٣ص^{٢}ـ٢)

∵ $\frac{ءص}{ءس}$ = قا س ظا س باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ = قا س× قا^٢ س + ظاس × قا س ظا س = قاس(قا^٢ س + ظا^٢ س)

الأيمن: ص $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ + $\left(\frac{ءص}{ءس}\right)^٢$ = قا^{٢}س(قا^٢ س + قا^{٢}س ـ١) + قا^٢ س (قا^{٢}س ـ١)

= قا^٢ س (٣ قا^٢ س ـ ٢) = ص^٢ (٣ ص^٢ ـ ٢) = الأيسر

معادلات بارامترية

مثـال ١٥ إذا كانت $\frac{ءص}{ءس} = ٢س - ٣$ ، $\frac{ءع}{ءس} = س^٢ - ١$ أوجد : $\frac{ء^٢ص}{ءع^٢}$ عند س = ٢

∵ $\frac{ءص}{ءع} = \frac{ءص}{ءس} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{٢س - ٣}{س^٢ - ١}$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى ع

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءع^٢} = \frac{ء}{ءع}\left[\frac{٢س - ٣}{س^٢ - ١}\right] = \frac{٢(س^٢ - ١) - ٢س(٢س - ٣)}{(س^٢ - ١)^٢} \times \frac{ءس}{ءع}$

$= \frac{٢س^٢ - ٢ - ٤س^٢ + ٦س}{(س^٢ - ١)^٢} \times \frac{١}{س^٢ - ١} = \frac{-٢س^٢ + ٦س - ٢}{(س^٢ - ١)^٣}$

عند س = ٢ ∴ $\frac{ء^٢ص}{ءع^٢} = \frac{-٢(٢)^٢ + ٦(٢) - ٢}{((٢)^٢ - ١)^٣} = \frac{-٨ + ١٢ - ٢}{(٣)^٣} = \frac{٢}{٢٧}$

مثـال ١٦ إذا كانت س = $ع^٢ - ٢ع$ ، ص = $ع^٢$ أوجد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ ، $\frac{ء^٣ص}{ءس^٣}$ عند ع = ٢

$\frac{ءس}{ءع} = ٢ع - ٢$ ، $\frac{ءص}{ءع} = ٢ع$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ع

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{٢ع}{٢ع - ٢}$ باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{٢(٢ع - ٢) - ٢ع \times ٢}{(٢ع - ٢)^٢} \times \frac{ءع}{ءس} = \frac{٤ع - ٤ - ٤ع}{(٢ع - ٢)^٢} \times \frac{١}{٢ع - ٢}$

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣} = \frac{ء}{ءس}\left[\frac{-٤}{(٢ع - ٢)^٣}\right] = \frac{ء}{ءس}\left[-٤(٢ع - ٢)^{-٣}\right] = ١٢(٢ع - ٢)^{-٤}$

عند س = ٢ ∴ $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{-٤}{(٢ \times ٢ - ٢)^٣} = -\frac{١}{٢}$ ،

$\frac{ء^٣ص}{ءس^٣} = \frac{١٢}{(٢ \times ٢ - ٢)^٤} = \frac{٣}{٤}$

مثـال ١٧ إذا كانت س = ٣ن^{٢} ـ ١ ، ص = ن^{٣} + ٢ أوجد $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ عند ن = ٤

$\frac{دس}{دن}$ = ٦ن ، $\frac{دص}{دن}$ = ٦ن^{٢} بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دن} \div \frac{دس}{دن} = \frac{٦ن^{٢}}{٦ن}$ = ن باشتقاق طرفى المعادلة بالنسبة إلى س

∴ $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}}$ = ١ × $\frac{دن}{دس}$ = ١ × $\frac{١}{٦ن}$ عند س = ٤ ∴ $\frac{د^{٢}ص}{دس^{٢}} = \frac{١}{٤٨}$

مثـال ١٦ إذا كانت س = $\frac{ع + ١}{ع ـ ١}$ ، ص = $\frac{ع ـ ١}{ع + ١}$ أوجد $\frac{دص}{دس}$ عند ع = ٢

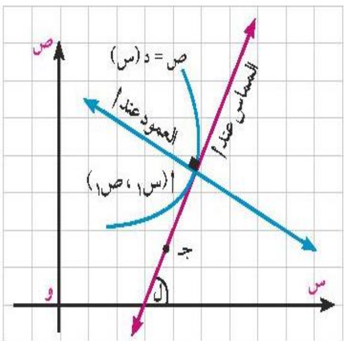
$\frac{دس}{دع} = \frac{(ع ـ ١) ـ (ع + ١)}{(ع ـ ١)^{٢}} = \frac{-٢}{(ع ـ ١)^{٢}}$

، $\frac{دص}{دع} = \frac{(ع + ١) ـ (ع ـ ١)}{(ع + ١)^{٢}} = \frac{٢}{(ع + ١)^{٢}}$

∴ $\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \div \frac{دس}{دع} = \frac{٢}{(ع + ١)^{٢}} \times \frac{(ع ـ ١)^{٢}}{-٢} = \frac{-(٢ ـ ١)^{٢}}{(٢ + ١)^{٢}} = \frac{-١}{٩}$

---

(٤) معادلتا المماس والعمودى للمنحنى



إذاكانت النقطة أ (س$_{١}$ ، ص$_{١}$) تقع على منحنى الدالة

د : ص = د(س) ، م ميل المماس للمنحنى عند النقطة

(١) معادلة المماس للمنحنى عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

هى : (ص ـ ص$_{١}$) = م (س ـ س$_{١}$)

(٢) معادلة العمودى على المنحنى عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$)

هى : (ص ـ ص$_{١}$) = م$_{ع}$ (س ـ س$_{١}$) حيث م$_{ع}$ = $\frac{-١}{م}$

مثــ١ــال أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٣ ـ ظتا^{٢} س عند النقطة التى تقع على المنحنى وأحداثيها السينى $\frac{\pi}{٤}$

عند س = $\frac{\pi}{٤}$ ∴ ص = ٣ ـ ظتا^{٢} س = ٣ ـ ظتا^{٢} $\frac{\pi}{٤}$ = ٢

ميل المماس م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ـ ٢ ظتا س قتا^{٢} س

عند س = $\frac{\pi}{٤}$ م = ـ ٢ ظتا ٤٥° قتا^{٢} ٤٥° = ـ٢ × ٢ = ـ ٤

معادلة المماس هى (ص ـ ص$_{١}$) = م (س ـ س$_{١}$)

(ص ـ ٢) = ـ ٤ (س ـ $\frac{\pi}{٤}$) أى أن ص ـ ٢ = ـ٤ س + π

معادلة العمودى ، ميل العمودى م$_{ع}$ = $\frac{١}{٤}$ هى (ص ـ ص$_{١}$) = م$_{ع}$ (س ـ س$_{١}$)

(ص ـ ٢) = $\frac{١}{٤}$ (س ـ $\frac{\pi}{٤}$) أى أن ٤ص ـ ٨ = س ـ $\frac{\pi}{٤}$

مثــ٢ــال أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = قاس عند النقطة التى تقع على المنحنى وأحداثيها السينى $\frac{٢\pi}{٣}$

عند س = $\frac{٢\pi}{٣}$ ∴ ص = قا $\frac{٢\pi}{٣}$ = ـ٢

ميل المماس م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = قا س ظا س

عند س = $\frac{٢\pi}{٣}$ م = قا ١٢٠° ظا ١٢٠° = ـ٢ × ـ$\sqrt{٣}$ = ٢ $\sqrt{٣}$

معادلة المماس هى (ص ـ ص$_{١}$) = م (س ـ س$_{١}$)

(ص + ٢) = ٢ $\sqrt{٣}$ (س ـ $\frac{٢\pi}{٣}$)

معادلة العمودى هى (ص ـ ص$_{١}$) = م$_{ع}$ (س ـ س$_{١}$) ، ميل العمودى م$_{ع}$ = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$

(ص + ٢) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٣}}$ (س ـ $\frac{٢\pi}{٣}$)

مثـ٣ـال أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص = ٢جتاس ـ قا س

عند النقطة التى تقع على المنحنى وأحداثيها السينى $\frac{\pi}{٣}$

عند س = $\frac{\pi}{٣}$ ∴ ص = ٢جتا $\frac{\pi}{٣}$ ـ قا $\frac{\pi}{٣}$ = ـ١

ميل المماس م = $\frac{ءص}{ءس}$ = ـ ٢جا س ـ قا س ظا س

عند س = $\frac{\pi}{٣}$ م = ـ٢ جا ٦٠° ـ قا ٦٠° ظا ٦٠° = ـ$\sqrt{٣}$ ـ ٢ $\sqrt{٣}$ = ـ ٣$\sqrt{٣}$

معادلة المماس هى (ص ـ ص١) = م (س ـ س١)

(ص + ١) = ـ٣$\sqrt{٣}$ (س ـ $\frac{\pi}{٣}$) أى أن ص + ١ = ـ٣$\sqrt{٣}$ س + $\sqrt{٣}$ π

معادلة العمودى هى (ص ـ ص١) = م$_{ع}$ (س ـ س١) ، ميل العمودى م$_{ع}$ = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$

(ص + ١) = $\frac{١}{٣\sqrt{٣}}$ (س ـ $\frac{\pi}{٣}$) أى أن ٣$\sqrt{٣}$ص + ٣$\sqrt{٣}$ = س ـ $\frac{\pi}{٣}$

مثـ٤ـال أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى س^{٢} + ص^{٢} = ٥٢ عند النقطة (٤ ، ـ٦)

بأخذ الاشتقاق بالنسبة إلى س ٢ س + ٢ ص $\frac{ءص}{ءس}$ = ٠

ميل المماس م = $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ـ س}{ص}$ عند النقطة (٤ ، ـ٦) م = $\frac{ـ٤}{ـ٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

معادلة المماس هى (ص ـ ص١) = م (س ـ س١)

(ص + ٦) = $\frac{٢}{٣}$ (س ـ ٤)

أى أن ٣ص + ١٨ = ٢ س ـ ٨ ∴ معادلة المماس ٢س ـ ٣ص ـ ٢٦ = ٠

معادلة العمودى هى (ص ـ ص١) = م$_{ع}$ (س ـ س١) ، ميل العمودى م$_{ع}$ = $\frac{ـ٣}{٢}$

(ص + ٦) = $\frac{ـ٣}{٢}$ (س ـ ٤)

أى أن ٢ص + ١٢ = ـ٣س + ١٢ ∴ معادلة العمودى ٣س + ٢ص = صفر

مثـ٥ـال أوجد معادلتى المماس والعمودى س^٢ + ٥ س ص + ص^٢ = ٥٢ عند (ـ١، ـ١)

بأخذ الاشتقاق بالنسبة إلى س ٢ س + ٥ س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٥ ص + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

ميل المماس م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ـ ٢س ـ٥ص}}{\text{٥س + ٢ص}}$ عند النقطة (ـ١ ، ـ١) م = $\frac{\text{٢+٥}}{\text{ـ٥ ـ٢}}$ = ـ١

معادلة المماس هى (ص ـ ص١) = م (س ـ س١)

(ص + ١) = ـ ١ (س + ١) ∴ معادلة المماس س + ص + ٢ = ٠

معادلة العمودى هى (ص ـ ص١) = مع (س ـ س١) ، ميل العمودى مع = ١

(ص + ١) = ١ (س + ١) ∴ معادلة العمودى س ـ ص = صفر

مثـ٦ـال أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى ص^٢ (١+ س^٢) = ٨ عند النقطة (ـ١ ، ٢)

بأخذ الاشتقاق بالنسبة إلى س ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (١+ س^٢) + ٢ س ص^٢ = ٠

ميل المماس م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ـ س ص}}{\text{١ + س}^{٢}}$ عند النقطة (ـ١ ، ٢) م = $\frac{\text{١×٢}}{\text{١ +١}}$ = ١

معادلة المماس هى (ص ـ ص١) = م (س ـ س١)

(ص ـ ٢) = ١(س + ١) ∴ معادلة المماس س ـ ص + ٣ = ٠

معادلة العمودى هى (ص ـ ص١) = مع (س ـ س١) ، ميل العمودى مع = ـ١

(ص ـ٢) = ـ١ (س + ١) ∴ معادلة العمودى س + ص ـ ١ = صفر

مثـ٧ـال أوجد معادلتى المماس والعمودى ص(جا س + جتا س) = جتا^٢ س عند س = $\frac{\pi}{٢}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ (جا س + جتا س) + (جتا س ـ جا س) ص = ـ٢ جتا س جا س

ميل المماس م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = صفر ، ص (١ + ٠) = ٠ فإن النقطة ($\frac{\pi}{٢}$ ، ٠)

معادلة المماس هى ص= ص١ = ٠ ، معادلة العمودى هى س= س١ = $\frac{\pi}{٢}$

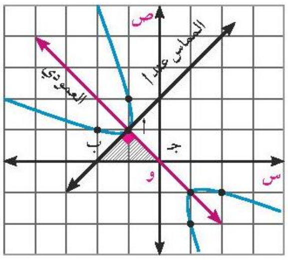
مثـ٨ـال أوجد معادلتى المماس والعمودى للمنحنى س^{٢} + ٣ س ص + ص^{٢} +١ = ٠ عند نقطة م(ـ١،١) وإذا قطعا محور السينات فى النقطتين ب ، جـ أحسب مساحة Δ م ب جـ

بأخذ الاشتقاق بالنسبة إلى س ٢ س+ ٣ ص + ٣س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

ميل المماس م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ـ٢س ـ ٣ص}}{\text{٣س + ٢ ص}}$ عند النقطة (ـ١ ، ١) م = $\frac{\text{٢ـ٣}}{\text{ـ٣+٢}}$ = ١

معادلة المماس هى (ص ـ ١) = ١(س + ١) ∴ س ـ ص + ٢ =٠

معادلة العمودى هى (ص ـ ١) = ـ١ (س + ١) ∴ س + ص = صفر



بحل المعادلتين المماس والعمودى عندما ص = صفر (محور السينات)

لإيجاد ب (ـ٢،٠) ، جـ (٠ ، ٠) ويكون ب جـ = ٢ وحدة طول

فإن مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ١ = ١ وحدة مساحة

مثـ٩ـال أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى للمنحنى

٣س^{٢} + ص^{٢} = ١٢ عند نقطة م(ـ١،٣)

بأخذ الاشتقاق بالنسبة إلى س ٦س+ ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = ٠

ميل المماس م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ـ ٦ س}}{\text{٢ ص}}$ عند النقطة (ـ١ ، ٣) م = $\frac{٦}{٦}$ = ١

معادلة المماس هى (ص ـ ٣) = ١(س + ١) ∴ س ـ ص + ٤ =٠

معادلة العمودى هى (ص ـ ٣) = ـ١ (س + ١) ∴ س + ص = صفر

بحل المعادلتين المماس والعمودى ومع (محور السينات) ص = صفر

لإيجاد ب (ـ٤ ، ٠) ، جـ (٢ ، ٠) ويكون ب جـ = ٦ وحدة طول

فإن مساحة Δ م ب جـ = $\frac{١}{٢}$ × ٦ × ٣ = ٩ وحدة مساحة

مثـ١٠ـال أوجد مساحة المثلث المحدود بمحور السينات والمماس والعمودى للمنحنى

$س^٢ + ٤ص^٢ = ٢٠$ عند نقطة أ(٢،٢)

بأخذ الاشتقاق بالنسبة إلى س $٢ س + ٨ ص \frac{ءص}{ءس} = ٠$

ميل المماس م $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{-٢ س}{٨ ص}$ عند النقطة (٢ ، ٢) م $= \frac{-٤}{١٦} = \frac{-١}{٤}$

معادلة المماس هى (ص ـ ٢) = $\frac{-١}{٤}$ (س ـ ٢) ∴ س + ٤ ص = ١٠

معادلة العمودى هى (ص ـ ٢) = ٤ (س ـ ٢) ∴ ـ ٤س + ص = ـ٦

بحل المعادلتين المماس والعمودى ومع (محور السينات) ص = صفر

لإيجاد ب (١٠ ، ٠) ، جـ ($\frac{٣}{٢}$ ، ٠) ويكون ب جـ = $\frac{١٧}{٢}$ وحدة طول

فإن مساحة Δ أ ب جـ = $\frac{١}{٢} \times \frac{١٧}{٢} \times ٢ = \frac{١٧}{٢}$ وحدة مساحة

مثـ١١ـال أوجد معادلتى المماس والعمودى س = جتا θ ، ص = $\sqrt{٢}$ + جا θ عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$

$\frac{ءس}{ء\theta} = -$ جا θ ، $\frac{ءص}{ء\theta} =$ جتا θ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

∴ ميل المماس م $= \frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ء\theta} \div \frac{ءس}{ء\theta} = \frac{\text{جتا}\,\theta}{-\text{جا}\,\theta} = -$ ظتا θ = ـ ظتا $\frac{\pi}{٤}$ = ـ ١

عند $\theta = \frac{\pi}{٤}$ س = جتا $\frac{\pi}{٤} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ص = $\sqrt{٢}$ + جا $\frac{\pi}{٤} = \frac{٣}{\sqrt{٢}}$ النقطة ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$)

معادلة المماس هى (ص ـ $ص_١$) = م (س ـ $س_١$) ميل المماس م = ـ١

(ص ـ $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$) = ـ ١(س ـ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ∴ معادلة المماس س + ص = $\frac{٤}{\sqrt{٢}}$

معادلة العمودى هى (ص ـ $ص_١$) = $م_ع$ (س ـ $س_١$) ، ميل العمودى $م_ع$ = ١

(ص ـ $\frac{٣}{\sqrt{٢}}$) = ١ (س ـ $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) ∴ معادلة العمودى س ـ ص = $\frac{-٢}{\sqrt{٢}}$

مثـال ١٢ أوجد معادلتى المماس والعمودى س= ن^{٢} + ٤ن ، ص = ٢ن^{٢} عند ن = ١

$\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = ٢ن +٤ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ = ٤ن بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

∴ ميل المماس م= $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{د ص}}{\text{د ن}}$ ÷ $\frac{\text{د س}}{\text{د ن}}$ = $\frac{\text{٤ن}}{\text{٢ن + ٤}}$ عند ن =١ ∴ م= $\frac{٢}{٣}$

عند ن = ١ س= ١ +٤ = ٥ ، ص = ٢×١ = ٢ النقطة (٥ ، ٢)

∴ معادلة المماس هى (ص ـ ص$_{١}$) = م (س ـ س$_{١}$) ميل المماس م = $\frac{٢}{٣}$

(ص ـ ٢) = $\frac{٢}{٣}$ (س ـ ٥) ∴ معادلة المماس ٢س ـ ٣ص = ٤

معادلة العمودى هى (ص ـ ص$_{١}$) = م$_{ع}$ (س ـ س$_{١}$) ، ميل العمودى م$_{ع}$ = $\frac{-٣}{٢}$

(ص ـ ٢) = $\frac{-٣}{٢}$ (س ـ ٥) ∴ معادلة العمودى ٣ س + ٢ص = ١٩

مثـال ١٣ أوجد معادلتى المماس والعمودى س= قا θ ، ص = ظا θ عند θ = $\frac{\pi}{٦}$

$\frac{\text{د س}}{\text{د }\theta}$ = قا θ ظا θ ، $\frac{\text{د ص}}{\text{د }\theta}$ = قا^{٢} θ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

∴ ميل المماس م= $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ = $\frac{\text{د ص}}{\text{د }\theta}$ ÷ $\frac{\text{د س}}{\text{د }\theta}$ = $\frac{\text{قا }\theta}{\text{ظا }\theta}$ = قتا θ = قتا $\frac{\pi}{٦}$ = ٢

عند θ = $\frac{\pi}{٦}$ س= قا $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، ص = ظا $\frac{\pi}{٦}$ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ النقطة ($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$)

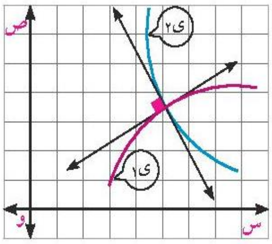
معادلة المماس هى (ص ـ ص$_{١}$) = م (س ـ س$_{١}$) ميل المماس م = ٢

(ص ـ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$) = ٢(س ـ $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) ∴ معادلة المماس ٢س ـ ص = $\frac{٣}{\sqrt{٣}}$

معادلة العمودى هى (ص ـ ص$_{١}$) = م$_{ع}$ (س ـ س$_{١}$) ، ميل العمودى م$_{ع}$ = $\frac{-١}{٢}$

(ص ـ $\frac{١}{\sqrt{٣}}$) = $\frac{-١}{٢}$ (س ـ $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) ∴ معادلة العمودى س + ٢ص = $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$

ملاحظة هامة



نقول إن المنحنيين ى١ ، ى٢ يتقاطعان على التعامد

إذا كان المماسان المرسومان لهما من نقطة تقاطعهما متعامدان

مثـ ١٤ ـال إذا كانت النقطة (١ ، ٢) إحد نقط تقاطع المنحنيين ص^{٢} ـ س^{٢} = ٣ ، س ص = ٢ هل يتعامد مماسا المنحنيين عند هذه النقطة ؟ فسر إجابتك

المنحنى الأول ٢ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ـ ٢س = ٠ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ميل المماس عند (١ ، ٢) م١ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{س}}{\text{ص}}$ = $\frac{١}{٢}$

المنحنى الثانى س $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ + ص = ٠ بالاشتقاق بالنسبة إلى س

∴ ميل المماس عند (١ ، ٢) م٢ = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{ـص}}{\text{س}}$ = $\frac{\text{ـ٢}}{١}$ = ـ٢

∵ م١ × م٢ = $\frac{١}{٢}$ × ـ٢ = ـ١ ∴ المماسان متعامدان عند النقطة (١ ، ٢)

مثـ ١٥ ـال إذا كانت النقطة (٤ ، ـ٢) تنتمى إلى المنحنى س^{٢} + ص^{٢} ـ ٢ ك س + ١٢ = ٠ أوجد قيمة ك . ثم أوجد معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة

∵ النقطة (٤ ، ـ٢) فهى تحقق المنحنى (٤)^{٢} + (ـ٢)^{٢} ـ ٢ ك (٤) + ١٢ = ٠

١٦ + ٤ ـ ٨ ك + ١٢ = ٠ ⟸ ٣٢ = ٨ ك ∴ ك = ٤

بالاشتقاق بالنسبة إلى س ٢ س + ٢ ص $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ـ ٨ = ٠

∴ ميل المماس م = $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = $\frac{\text{٤ ـ س}}{\text{ص}}$ عند (٤ ، ـ٢) ∴ م = $\frac{\text{٤ ـ ٤}}{\text{ـ٢}}$ = صفر

∵ م = صفر ∴ معادلة المماس هى ص = ص١ = ـ٢

مثـ١٦ـال إذا كانت للمنحنى ص = ٢س^{٣} + ٣ س^{٢} + ٤ س + ٥ مماسان متوازيان أحدهما يمس المنحنى عند النقطة (ـ ١ ، ٢). أوجد معادلة المماس للمنحنى الآخر

$\frac{دص}{دس}$ = م١ = ٦ س^{٢} + ٦ س + ٤ عند (ـ١ ، ٢) ∴ م١ = ٦ ـ ٦ + ٤ = ٤

∵ المماسان متوازيان ∴ م١ = م٢ = ٤ عند النقطة (جـ ، د)

∴ ميل المماس م٢ = ٦جـ^{٢} ـ ٦جـ + ٤ = ٤ ∴ جـ = ٠ أ، جـ = ـ١

عند جـ = ٠ ∴ د = ٠ + ٠ + ٠ + ٥ = ٥ النقطة (٠ ، ٥) تحقق المنحنى

عند جـ = ـ١ ∴ د = ـ٢ + ٣ ـ ٤ + ٥ = ٢ النقطة (ـ١ ، ٢) تحقق المنحنى

معادلة المماس هى (ص ـ ص١) = م (س ـ س١) عند (٠ ، ٥) ، م٢ = ٤

(ص ـ ٥) = ٤(س ـ ٠) ∴ معادلة المماس ٤س ـ ص + ٥ = ٠

مثـ١٧ـال أثبت أن المنحنيين (س ـ١)^{٢} + ص^{٢} = ٢ ، (س +١)^{٢} + ص^{٢} = ٢ يتقاطعان على التعامد ، ثم أوجد معادلات المماسات لهما عند نقط التقاطع .

نقط تقاطع المنحنيين (س ـ١)^{٢} + ص^{٢} ـ ٢ = (س +١)^{٢} + ص^{٢} ـ ٢ = ٠

∴ س^{٢} ـ ٢س + ١ = س^{٢} + ٢س + ١ ⟸ س = ٠ ، ص = ± ١

المنحنى الأول ٢(س ـ١) + ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠   المنحنى الثانى ٢(س +١) + ٢ص $\frac{دص}{دس}$ = ٠

$\frac{دص}{دس}$ = م١ = $\frac{س ـ١}{ـ ص}$ $\frac{دص}{دس}$ = م٢ = $\frac{س +١}{ـ ص}$

عند (٠ ، ١) ∴ م١ = ١ ، م٢ = ـ ١ ∴ م١ × م٢ = ـ ١ (المنحنيين متعامدان)

معادلة المماس الأول ص ـ ١ = س   معادلة المماس الثانى ص ـ ١ = ـ س

عند (٠ ، ـ١) ∴ م١ = ـ١ ، م٢ = ١ ∴ م١ × م٢ = ـ ١ (المنحنيين متعامدان)

معادلة المماس الأول ص + ١ = س   معادلة المماس الثانى ص + ١ = ـ س

(٥) المعادلات الزمنية المرتبطة

إذا كانت ص = د(س) ، س تتغير تبعاً لتغير الزمن ن ، فإن ص تتغير أيضاً تبعاً لتغير الزمن ن أى أن ص دالة الدالة فى الزمن ويكون $\boxed{\frac{دص}{دن} = \frac{دص}{دس} \times \frac{دس}{دن}}$

وتربط هذه العلاقة المعدل الزمنى لتغير س بالمعدل الزمنى لتغير ص

- يكون المعدل موجباً إذا كان المتغير يتزايد بتزايد الزمن (تمدد ، تباعد ، تراكم ، تزايد ، ..)
- يكون المعدل سالباً إذا كان المتغير يتناقص بتزايد الزمن (انكماش ،تسرب ، اقتراب ،...)

خطوات حل التمارين

(١) تحديد المتغيرات وتسميتها (٢) رسم تخطيطى للمتغيرات

(٣) إيجاد علاقة الأرتباط (٤) اشتقاق العلاقة بالنسبة للزمن

(٥) التعويض عن قيم المتغيرات لإيجاد المعدل المطلوب

مثـال ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة:

(١) إذا زاد طول نصف قطر دائرة بمعدل $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث فإن محيط الدائرة يزيد عند هذه اللحظة بمعدل:

(أ) $\frac{٤}{\pi}$ سم/ث (ب) $\frac{\pi}{٤}$ سم/ث (ج) $\frac{١}{٨}$ سم/ث (د) $\boxed{٨ \text{ سم/ث}}$

ع = ٢ π نو ⟸ $\frac{دع}{دن} = ٢\pi \frac{دنو}{دن} = ٢\pi \times \frac{٤}{\pi} = ٨$ سم / ث

(٢) ينصهر مكعب من الثلج محتفظاً بشكله بمعدل ١ سم^{٣}/ث فإن معدل تغير طول حرف المكعب عندما يكون حجمه ٨ سم^{٣} هو: .... سم / ث

(أ) $-\frac{١}{١٢}$ (ب) $\boxed{\frac{١}{١٢}}$ (ج) $-\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{١}{٦}$

∵ ع = ٨ فإن ل = ٢ سم ع = ل^{٣} ⟸ $\frac{دع}{دن} = ٣ ل^{٢} \frac{دل}{دن}$

∵ $١ = ٣ \times ٤ \times \frac{دل}{دن}$ ∴ $\frac{دل}{دن} = \frac{١}{١٢}$ سم / ث

③ جسم يتحرك على المنحنى ص^٢ = س^٣، إذا كان $\frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٢}$ وحدة / ث عند ص = - ١ فإن $\frac{ءص}{ءس}$ عند هذه اللحظة يساوى .... وحدة / ث

(أ) - $\frac{٣}{٤}$ (ب) - $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{٣}{٤}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

٢ ص $\frac{ءص}{ءن}$ = ٣ س^٢ $\frac{ءس}{ءن}$ ⟸ ـ ٢ $\frac{ءص}{ءن}$ = ٣ × $\frac{١}{٢}$ ∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{-٣}{٤}$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} ÷ \frac{ءس}{ءن} = \frac{-٣}{٤} ÷ \frac{١}{٢} = \frac{-٣}{٢}$ وحدة / ث

④ إذا كان ميل المماس للمنحنى ص = د(س) عند نقطة ما = $\frac{١}{٢}$ وكان الإحداثى السينى لهذه النقطة يتناقص بمعدل ٣ وحدات / ث فإن معدل تغير إحداثيها الصادى يساوى .... وحدة / ث

(أ) - $\frac{١}{٦}$ (ب) - $\frac{٣}{٢}$ (جـ) $\frac{١}{٦}$ (د) $\frac{٣}{٢}$

∵ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}$ ، $\frac{ءس}{ءن}$ = ـ٣ ، ∴ $\frac{ءص}{ءن} = \frac{ءص}{ءس} × \frac{ءس}{ءن} = \frac{١}{٢}$ × ـ٣ = $\frac{-٣}{٢}$

مثـ٢ـال مكعب يتمدد بالحرارة فيزداد طول حرفه بمعدل ٠٫٠٢ سم/د وتزداد مساحة سطحه بمعدل ٠٫٧٢ سم^٢/د . أوجد طول حرف المكعب فى هذه اللحظة ومعدل زيادة حجمه حينئذ

نفرض أن حجم المكعب ع ، مساحة سطحه م ، طول حرفه ل

∵ م = ٦ل^٢ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

$\frac{ءم}{ءن}$ = ١٢ ل $\frac{ءل}{ءن}$ ⟸ ٠٫٧٢ = ١٢ ل × ٠٫٠٢ ⟸ ل = ٣ سم

∵ ع = ل^٣ ∴ $\frac{ءع}{ءن}$ = ٣ ل^٢ $\frac{ءل}{ءن}$ ⟸ $\frac{ءع}{ءن}$ = ٣ × (٣)^٢ × ٠٫٠٢ = ٠٫٥٤ سم^٣/د

مثـ٣ـال تتحرك نقطة على منحنى معادلته س^٢ + ص^٢ ـ ٤س + ٨ص ـ ٦ = ٠ فإذا كان معدل تغير احداثيها السينى بالنسبة للزمن عند النقطة (٣ ، ١) يساوى ٤ وحدات/ث .

أوجد معدل تغير إحداثيها الصادى بالنسبة إلى الزمن

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن $\quad$ ٢س $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ + ٢ص $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ـ ٤ $\frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ + ٨ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ =٠

بالتعويض $\quad$ ٢ × ٣ × ٤ + ٢ × $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ـ ٤ × ٤ + ٨ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ =٠

∴ ٢٤ ـ ١٦ = ـ ١٠ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ⟸ ∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ـ ٨و٠ وحدة/ث

مثـ٤ـال سقط حجر فى بحيرة ساكنة فتولدت موجة دائرية يتزايد طول نصف قطرها بمعدل ٤سم/ث . أوجد معدل تزايد مساحة سطح الموجد فى نهاية ٥ ثوانٍ

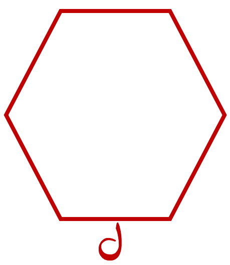
نفرض أن طول نصف قطر الوجة = نق ، ومساحة سطحها = م $\quad$ فإن م = π نق^{٢}

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن $\quad$ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢ π نق $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

عندما ن = ٥ ثوان فإن نق = ٥ × ٤ = ٢٠سم

∴ معدل تزايد مساحة سطح الموجة $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٢× π × ٢٠ × ٤ = ١٦٠ π سم^{٢}/ث

مثـ٥ـال صفيحة على شكل سداسى منتظم تنكمش ، وُجد أن معدل تغير طول ضلعها ١و٠سم أوجد معدل التغير فى مساحة الصفيحة عندما يكون طول ضلعها ١٠سم



نفرض أن طول ضلع السداسى المنتظم = ل ، ومساحة سطحها = م

فإن مساحة المضلع المنتظم م = $\frac{١}{٤}$ ن ل^{٢} ظتا $\frac{\pi}{\text{ن}}$: ن عدد الأضلاع

مساحة السداسى المنتظم م = $\frac{٦}{٤}$ ل^{٢} ظتا $\frac{\pi}{٦}$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن $\quad$ $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٣ ل ظتا $\frac{\pi}{٦}$ × $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ $\quad$ وحيث $\frac{\text{دل}}{\text{دن}}$ = ـ١و٠

∴ معدل تناقص المساحة = $\frac{\text{دم}}{\text{دن}}$ = ٣× ١٠ × $\sqrt{٣}$ × ـ١و٠ = ـ ٣$\sqrt{٣}$ سم^{٢}/ث

مثـــ٦ـــال يتسرب غاز بالون كرى بمعدل ٢٠سم^3/ث ، أوجد معدل تغير طول نصف قطر البالون فى اللحظة التى يكون فيها طول نصف قطره ١٠سم ، ثم أوجد معدل تغير مساحة السطح الخارجللبالون فى نفس اللحظة .

نفرض أن طول نصف قطر البالون = نق ، حجم البالون ع

فإن حجم البالون ع = $\frac{٤}{٣}\pi$ نق^3

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن $\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = ٤\,\pi\,\text{نق}^2\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

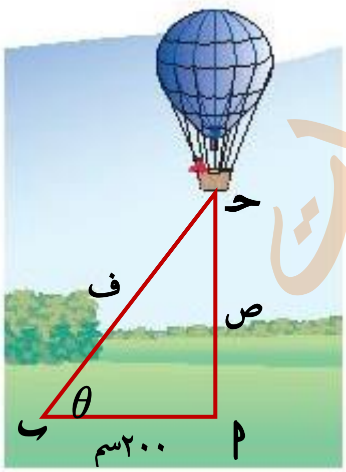
عندما نق = ١٠سم فإن $-٢٠ = ٤ \times ١٠٠\pi\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$ ∴ $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{-١}{٢٠\pi}$ سم/ث

ومساحة سطح البالون = م = ٤π نق^2

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨\,\pi\,\text{نق}\,\frac{\text{دنق}}{\text{دن}}$

عندما $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = \frac{-١}{٢٠\pi}$ فإن $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ٨ \times ١٠\pi \times \frac{-١}{٢٠\pi}$ ∴ $\frac{\text{دنق}}{\text{دن}} = -٤$ سم^2/ث

مثـــ٧ـــال يرتفع بالون رأسياً لأعلى من نقطة أ على سطح الأرض .وُضع جهاز لتتبع حركة البالون عند نقطة ب فى نفس المستوى الأفقى للنقطة أ وعلى بعد ٢٠٠متر منها وصد الجهاز زاوية أرتفاع البالون فوجدها $\frac{\pi}{٤}$ وتتزايد بمعدل ١٢,٠ ء/د. أوجد معدل ارتفاع البالون وقتها



من الرسم Δ أ ب جـ قائم الزاوية فى أ ∴ ف^2 = ص^2 + (٢٠٠)^2

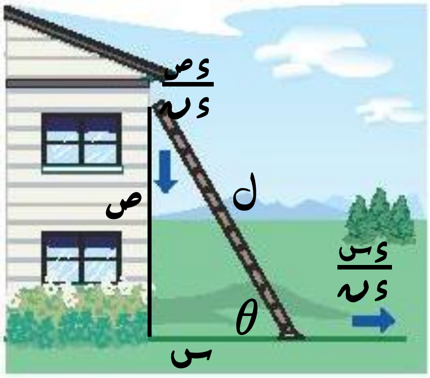
بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن ٢ف $\frac{\text{دف}}{\text{دن}}$ = ٢ ص $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ---(١)

ظا $\theta = \frac{\text{ص}}{٢٠٠}$ ⟸ قا$^2\theta\,\frac{\text{د}\theta}{\text{دن}} = \frac{١}{٢٠٠} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ --(٢)

عندما $\theta = \frac{\pi}{٤}$ ⟸ قا$^2\theta$ = ٢ ، $\frac{\text{د}\theta}{\text{دن}}$ = ١٢,٠ ء/د

بالتعويض فى(٢) ٢ × ١٢,٠ = $\frac{١}{٢٠٠} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ ∴ معدل أرتفاع البالون $\frac{\text{دص}}{\text{دن}}$ = ٤٨ متر/د

مثـ٨ـال يرتكز سلم بطرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسى. إذا انزلق الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٣٠ سم/ث، أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوى $\frac{\pi}{٣}$



من الرسم $\therefore$ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = \text{ل}^٢$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن $٢\text{س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$ — (١)

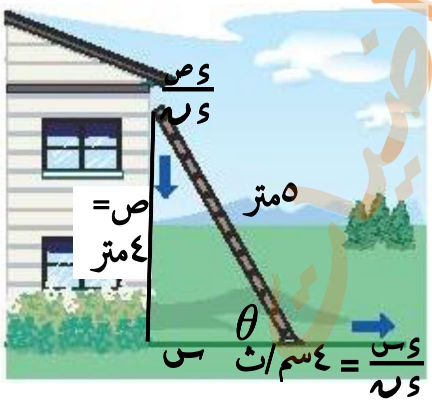
$\text{حا}\,\theta = \text{حا}\,٦٠^\circ = \frac{\text{ص}}{\text{ل}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢} \Leftarrow \text{ص} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}\text{ل}$

وبالمثل $\text{حتا}\,\theta = \text{حتا}\,٦٠^\circ = \frac{\text{س}}{\text{ل}} = \frac{١}{٢} \Leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}\text{ل}$ --- (٢)

من (١) ، (٢) $\cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}}\text{ل} \times ٣٠ + \cancel{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{\cancel{٢}}\text{ل} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$

$\therefore$ معدل أنزلاق الطرف العلوى للسلم $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-٣٠\,\text{ل}}{\sqrt{٣}\,\text{ل}} = -١٠\sqrt{٣}$ سم/ث (تناقص)

مثـ٩ـال سلم طوله ٥ أمتار يرتكز بطرفه العلوى على حائط رأسى وبطرفه السفلى على أرض أفقية . إذا تحرك الطرف السفلى مبتعداً عن الحائط بمعدل ٤سم/د،عندما يكون الطرف العلوى على ارتفاع ٤ أمتار من الأرض . أوجد معدل انزلاق الطرف العلوى للسلم ، ثم أوجد معدل تغير قياس الزاوية بين السلم والأرض عند هذه اللحظة



من الرسم $\therefore$ $\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = (٥)^٢$ ، س = ٣ أمتار

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن $٢\text{س} \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} + ٢\text{ص} \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = ٠$ — (١)

$\therefore \frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = -٠{,}٠٣$ متر/ث (تناقص)

$\because \text{حتا}\,\theta = \frac{\text{س}}{٥} = \frac{٣}{٥} \Leftarrow ٥\,\text{حتا}\,\theta = \text{س}$

بالاشتقاق بالنسبة للزمن ن $-٥\,\text{جا}\,\theta \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ ---- (٢)

من (٢) $-٥ \times \frac{٤}{٥} \times \frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = ٠{,}٠٤ \Leftarrow$ معدل تغير قياس الزاوية $\frac{\text{ء}\theta}{\text{ءن}} = ٠{,}٠١$ ءً/ث

ملاحظة هامة : إذا كانت س. القيمة الأبتدائية للمتغير س (عند ن = ٠) ، دس/دن معدل تغير س بالنسبة للزمن ن ، س هو قيمة المتغير بعد زمن قدره ن ثانية فإن

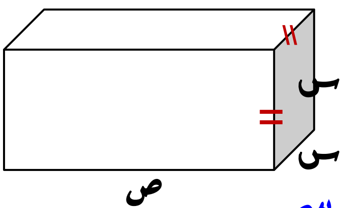
س = س. + دس/دن × ن

مثـ١٠ـال انطلق صاروخ كتلته ١٥ طناً وكان ينفث الوقود بمعدل ٢٠٠ كجم/ث ، ما كتلته بعد ٣٠ ثانية من لحظة أنطلاقه ؟

الكتله ك = ١٥ طن ، دك/دن = ـ ٢٠٠ كجم/ث = ـ٢و٠ طن/ث

∵ ك = ك. + دك/دن × ن = ١٥ + (ـ٢و٠) × ٢٠ = ١١ طن

مثـ١١ـال جسم معدنى على شكل متوازى مستطيلات قاعدته مربعة الشكل ، طول ضلعها يتزايد بمعدل ١سم/د وارتفاعه يتناقص بمعدل ٢سم/د .أوجد معدل تزايد حجمه عندما يكون ضلعه ٥سم وأرتفاعه ٢٠سم ، بعد كم دقيقة يتوقف تغير حجم متوازى المستطيلات عن الزيادة .



نفرض أن طول القاعدة المربعة س ، معدل ال تغير دس/دن = ١سم/د

والارتفاع ص ، معدل تغير الأرتفاع دص/دن = ـ٢سم/د

بعد ن ثانية طول القاعدة = (س+ن) سم ، الارتفاع = (ص ـ٢ن) سم

الحجم ع = مساحة القاعدة × الرتفاع = (س + ن)٢ (ص ـ ٢ن)

عند س = ٥ ، ص = ٢٠ ∴ ع = (٥ + ن)٢ (٢٠ ـ٢ن)

∴ ع = ٥٠٠ ـ ٥٠ن + ٢٠٠ن ـ ١٠ ن٢ + ٢٠ن٢ ـ ٢ن٣

ع = ـ ٢ن٣ + ١٠ن٢ + ١٥٠ ن + ٥٠٠ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

دع/دن = ـ ٦ن٢ + ٢٠ن + ١٥٠ عند دع/دن = ـ ٦ن٢ + ٢٠ن + ١٥٠ = صفر

مثـ١٢ـال كتلة معلومة من غاز درجة حرارتها ثابتة ، أنقص حجمها بمعدل ٢سم^{٣}/ث فإذا كان الضغط يتناسب عكسياً مع الحجم وأن الضغط يعادل ١٠٠٠ ث جم/سم^{٣} عندما الحجم ٢٥٠سم^{٣} .أوجد معدل تغير الضغط بالنسبة للزمن عندما يكون يصبح حجم الغاز ١٠٠سم^{٣} .

$\frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -٢$ سم^{٣}/ث ، ض = ١٠٠٠ ث جم/سم^{٢} عندما ع = ٢٥٠سم^{٣}

∵ ص $\propto \frac{١}{\text{ع}}$ فإن ص $= \frac{\text{م}}{\text{ع}}$: م ثابت $١٠٠٠ = \frac{\text{م}}{٢٥٠}$

∴ ص $= \frac{٢٥ \times ١٠^{٤}}{\text{ع}}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٢٥ \times ١٠^{٤}}{\text{ع}^{٢}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دن}}$

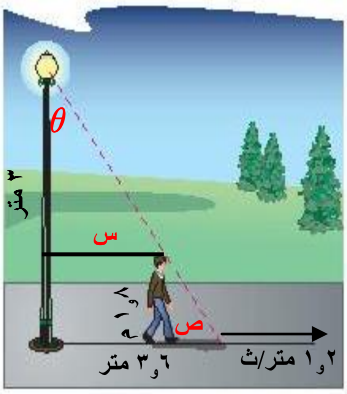
∴ $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{-٢ \times -٢٥ \times ١٠^{٤}}{١٠^{٤}} = ٥٠$ ث جم/سم^{٢}/ث

مثـ١٣ـال يسير رجل طوله ١٨٠ سم مبتعداً عن قاعدة مصباح أرتفاعه ٣ أمتار بمعدل ١٫٢ م/ث. أوجد معدل تغير طول ظل الرجل . و إذا كان المستقيم المار بأعلى نقطة من رأس الرجل وقمة المصباح يميل على الأرض بزاوية θ عندما يبعد الرجل عن قاعدة المصباح بمسافة قدرها س متراً فأثبت أن س = $\frac{٥}{}$ ظتا θ ،

ثم أوجد معدل تغير θ عندما يبعد الرجل مسافة ٣٫٦ متر عن قاعدة المصباح

نفرض أن بعد الرجل عن قاعدة المصباح هو س متر ، ص طول الظل

ملاحظة فى مسائل طول الظل نستخدم التشابة أو ظل الزاوية



من التشابه نجد $\frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}} = \frac{٣}{١٫٨} = \frac{٥}{٣}$

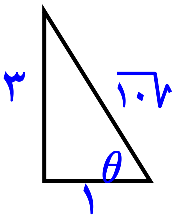
∴ ٥ ص = ٣ س + ٣ ص $\Longleftarrow$ ∴ ٢ ص = ٣ س

بالاشتقاق بالنسبة إلى ن $٢ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = ٣ \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$

عند $\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ١٫٢$ سم/ث ∴ طول الظل يزداد بمعدل $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = \frac{٣}{٢} \times ١٫٢ = ١٫٨$

ثانياً من الرسم $\text{ظتا}\,\theta =$ $\Longleftarrow$ $\therefore \text{س} = \frac{٦}{٥\,\text{ظتا}\,\theta} = ١{,}٢\ \text{ظا}\,\theta$ ###

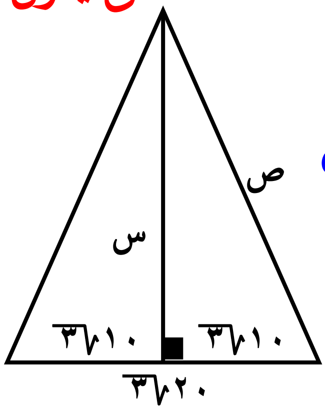
$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ١{,}٢\ \text{قا}^{٢}\,\theta \times \frac{\text{د}\theta}{\text{دن}}$ ----- (٢)



عندما س = ٣,٦ متر $\text{ظتا}\,\theta = \frac{١{,}٢}{٣{,}٦} = \frac{١}{٣}$ $\Longleftarrow$ $\text{قا}\,\theta = \sqrt{١٠}$

من (٢) $١{,}٢ = ١{,}٢ \times ١٠\ \frac{\text{د}\theta}{\text{دن}}$ $\Longleftarrow$ $\therefore \frac{\text{د}\theta}{\text{دن}} = ٠{,}١$ ء/ث

مثـ ١٤ ـال مثلث متساوى الساقين طول قاعدته $٢٠\sqrt{٣}$ إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل ٣ سم/ساعة ، فأوجد معدل تناقص مساحة سطح المثلث عند اللحظة التى يكون عندها طول كل من الساقين مساوياً لطول القاعدة .



من الرسم $\text{ص}^{٢} - \text{س}^{٢} = (١٠\sqrt{٣})^{٢}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٣$ سم/س

بالاشتقاق بالنسبة إلى ن $٢\text{ص}\ \frac{\text{دص}}{\text{دن}} - ٢\,\text{س}\ \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = ٠$

$\frac{\text{دس}}{\text{دن}} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دن}} = -٣ \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}$ -----(١)

مساحة المثلث $\text{م} = \frac{١}{٢} \times ٢٠\sqrt{٣}\ \text{س}$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن

$\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٠\sqrt{٣}\ \frac{\text{دس}}{\text{دن}}$ ---- (٢)

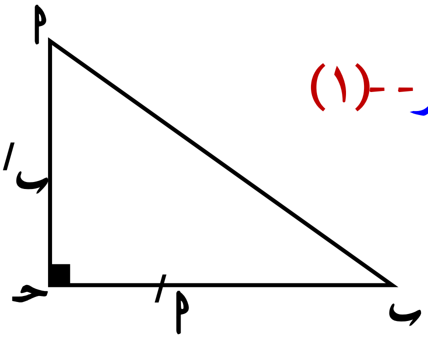
عندما ص = $٢٠\sqrt{٣}$ سم $\therefore$ س = ٣٠ سم

من (١) $\therefore \frac{\text{دس}}{\text{دن}} = -٣ \times \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٣٠} = -٢\sqrt{٣}$ سم/ساعة

من (٢) $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = ١٠\sqrt{٣} \times -٢\sqrt{٣} = -٦٠$ سم^{٢}/ساعة

مثـ١٥ـال Δ أ ب حـ قائم الزاوية فى حـ ، مساحته ثابتة وتساوى ٢٤ سم^{٢} ، إذا كان معدل تغير ب/ يساوى ١سم/ث فأوجد معدل تغير أ/ ، ق(∠أ) عند ب/ = ٨سم

∵ مساحة Δ أ ب حـ $\quad$ م = $\frac{١}{٢}$ أ/ ب/ ،



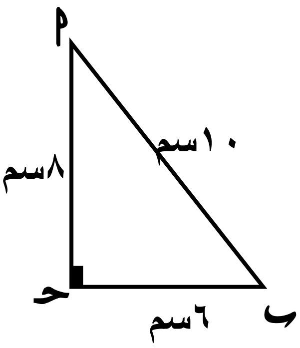
∵ المساحة ثابتة بالاشتقاق $\quad$ أ/ $\frac{\text{د}ب/}{\text{د}ن}$ + ب/ $\frac{\text{د}أ/}{\text{د}ن}$ = صفر --(١)

عندما ب/ = ٨ سم ، م = ٢٤ سم^{٢} ∴ أ/ = ٦ سم

من (١) $\quad$ ٦ × ١ + ٨ × $\frac{\text{د}أ/}{\text{د}ن}$ = صفر

∴ $\frac{\text{د}أ/}{\text{د}ن}$ = $-\frac{٣}{٤}$ سم/ث $\quad$ (الضلع أ/ يتناقص بمعدل $\frac{٣}{٤}$ سم/ث)

ثانياً ∵ ظا أ = $\frac{أ/}{ب/}$ $\quad$ بالاشتقاق بالنسبة إلى ن



قا^{٢} أ $\frac{\text{د}أ}{\text{د}ن}$ = $\dfrac{ب/ \frac{\text{د}أ/}{\text{د}ن} - أ/ \frac{\text{د}ب/}{\text{د}ن}}{(ب/)^{٢}}$

$(\frac{٥}{٤})^{٢}$ $\frac{\text{د}أ}{\text{د}ن}$ = $\dfrac{٨ \times \frac{-٣}{٤} - ٦ \times ١}{(٨)^{٢}}$

⟸ $\frac{\text{د}أ}{\text{د}ن}$ = $\frac{-١٢}{٦٤}$ × $\frac{١٦}{٢٥}$ = $\frac{-٣}{٢٥}$ ء/ث