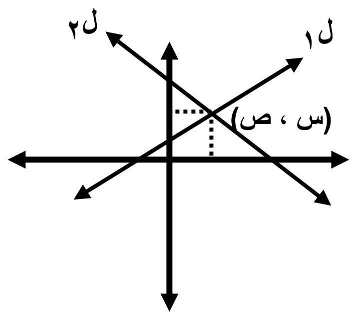
ملخص منهج الجبر

س + ص = ٥ تسمى معادلة من الدرجة الأولى في متغيرين ولها عدد لانهائي من الحلول في ح × ح

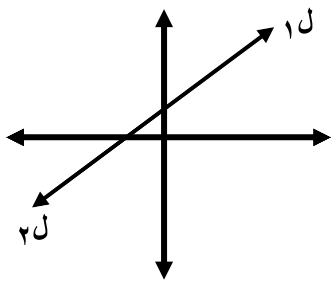
س ص = ٥ تسمى معادلة من الدرجة الثانية في متغيرين

* لحل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين نرسم في المستوى الديكارتي المستقيمين الممثلين للمعادلتين ليكونا ل١ ، ل٢ وتكون مجموعة الحل هي نقط تقاطع المستقيمين ل١ ، ل٢

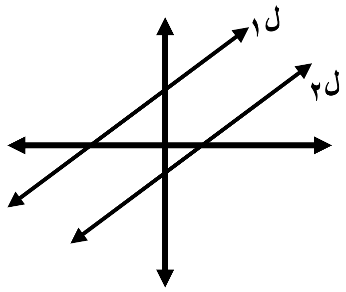
① ل١،ل٢ يتقاطعان في النقطة (س ،ص)



② ل١ ، ل٢ منطبقان



③ ل١، ل٢ متوازيان



يمكن التعرف على عدد حلول أي زوج من معادلات الدرجة الأولى في متغيرين دون اللجوء للرسم البياني عن طريق ميل المستقيم الممثل للمعادلة ونقطة تقاطعه مع محور الصادات

نوجد ميل المستقيمين فإذا كان :

- م١ ≠ م٢
- م١ = م٢
  - نوجد نقطتي تقاطع المستقيمين مع محور الصادات فإذا كان
    - النقطتان متساويتين ← المستقيمان منطبقان ويكون لهما عدد لا نهائي من الحلول
    - النقطتان مختلفتين ← المستقيمان متوازيان ويكون عدد الحلول = صفر

ملاحظة هامة

(١) لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠ ونوجد قيمة ص المناظرة

لإيجاد ميل المستقيم لدينا حالتين(١) إذا كان المستقيم على الصورة أس + ب ص + جـ = ٠ يكون ميله = $\frac{\text{- معامل س}}{\text{معامل ص}}$

(٢) إذا كان المستقيم على الصورة ص = أس + جـ يكون ميل المستقيم يساوى معامل س (أ)

اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر
01005751300

تطبيقات على حل معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين

خطوات حل المسائل اللفظية

(١) نفرض أحد المجهولين س ، والآخر ص

(٢) من معطيات المسألة نكون معادلتين من الدرجة الأولى في س ، ص

(٣) نحل المعادلتين جبريا أو بيانيا لنحصل على قيمة كل من س ، ص

خد بالك من الألفاظ الآتية (يزيد عن، يقل عن، ينقص عن) كلها بمعنى الطرح

(أضيف بمعنى الجمع)　　　(كان الناتج ، بمقدار) يعنى (=)

مثال توضيحي : إذا كان ضعف عدد الطالبات فى احدى المدارس يزيد عن عدد الطلبة بمقدار ٥٠ وكان ثلاثة أمثال عدد الطالبات يقل عن ضعف عدد الطلبة بمقدار ٥٠ أوجد عدد كل من الطلبة والطالبات

الحـــــــــــل

نفرض عدد الطلبة = س　　　وعدد الطالبات = ص

٢ص – س = ٥٠ .... (١)　　،　　٢س – ٣ص = ٥٠ ....(٢)

من(١) س = ٢ص - ٥٠ بالتعويض فى(٢)　　∴ ٢(٢ص - ٥٠) – ٣ص = ٥٠

٤ص – ١٠٠ – ٣ص = ٥٠　　ص-١٠٠ = ٥٠　　ص=١٥٠

∵ س = ٢ص – ٥٠　　∴ س = ٢×١٥٠ – ٥٠ = ٣٠٠ – ٥٠ = ٢٥٠

∴ عدد الطلبة = ٢٥٠ طالب　　،　　عدد الطالبات = ١٥٠ طالبة

حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية

تعتمد طريقة حل معادلتين فى متغيرين إحداهما من الدرجة الأولى والأخرى من الدرجة الثانية على طريقة التعويض والمثال التالى يوضح خطوات الحل

مثال : أوجد فى ح×ح مجموعة حل المعادلتين س – ص = ١ ، $س^{٢} + ص^{٢} = ١٣$

الحـــــل

نبدأ بمعادلة الدرجة الأولى

س = ص + ١ بالتعويض فى المعادلة الثانية $(ص+١)^{٢} + ص^{٢} = ١٣$

$ص^{٢}$ +٢ص +١ +$ص^{٢}$ – ١٣= ٠ ∴ ٢$ص^{٢}$ + ٢ص – ١٢ =٠ (÷ ٢)

∴ ص٢ + ص – ٦ = ٠ (ص +٣)(ص – ٢)= ٠

∴ ص = - ٣ أو ص = ٢

س = -٢ أو س = ٣

م٠ح = { (-٢ ، -٣) ، (٣ ، ٢) }

حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد جبريا باستخدام القانون العام

القانون العام س = $\frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ؍ جـ}}{٢؍}$

ملحوظة :

قبل التعويض في القانون العام يجب وضع المعادلة في الصورة العامة (؍$س^{٢}$ + ب س + جـ)= ٠

(١) المعادلة $س^{٢}$ = ٦س – ٧ توضع على الصورة العامة كالتالي $س^{٢}$ – ٦س + ٧ = ٠

(٢) س – ٣ = $\frac{-١}{س}$ (بضرب طرفي المعادلة × س) س ×س – س ×٣ = س × $\frac{-١}{س}$

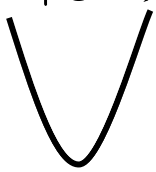
∴ $س^{٢}$ – ٣س= -١ $س^{٢}$ -٣س + ١ = ٠ ثم عوض فى القانون العام

حل معادلة الدرجة الثانية في مجهول واحد بيانيا

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الثانية فى مجهول واحد هى

أس^{٢} + ب س + جـ = ٠ حيث أ ، ب ، جـ ∈ ح ، أ ≠ صفر

إذا كان أ > ٠

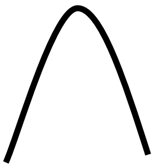


إذا كان إحداثي رأس منحنى الدالة (س ، ص) فإن

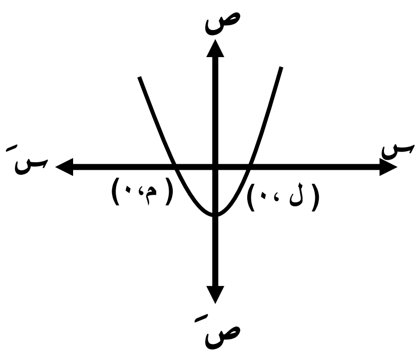
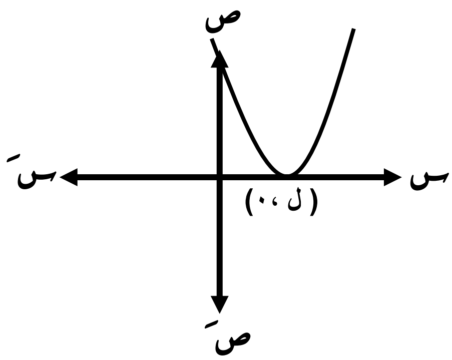
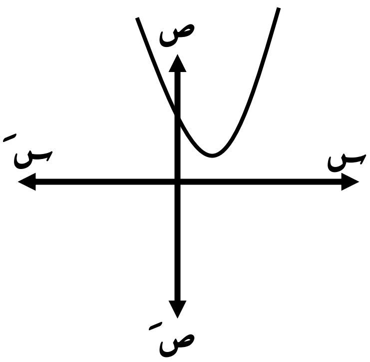
الإحداثي السيني س = معادلة خط التماثل

الإحداثي الصادي ص= القيمة العظمى أو الصغرى للدالة

إذا كان أ < ٠



وتوجد لدينا ثلاث حالات

المنحنى يقطع محور السينات في نقطتين	المنحنى يقطع محور السينات في نقطة واحدة	المنحنى لا يقطع محور السينات
		
م . ح = { ل ، م }	م . ح = { ل }	م . ح = ∅

مجموعة أصفار دالة كثيرة

أي دالة تتكون من ثلاثة عناصر أساسية هي

① المجال (قيم س)   ② المجال المقابل (قيم ص المناظرة لقيم س)

③ قاعدة تعريف الدالة (والتي من خلالها يمكن التعرف على نوع الدالة)

فمثلا: إذا كانت د : ح ⟵ ح حيث د(س) = ٢س^{٢} + ٥س – ١

هنا نجد الآتي : المجال هو (ح) ، المجال المقابل هو (ح)

وقاعدة التعريف هي د(س) = ٢س^{٢} + ٥س – ١

دالة كثيرة الحدود : هي دالة مجالها ح ومجالها المقابل ح

أصفار دالة كثيرة الحدود :

هي مجموعة قيم س التي تجل الدالة د(س) = صفر ونرمز لها بالرمز ص(د)

<u>لاحظ الفرق بين كل من : د ، د(س) ، ص(د)</u>

(١) د ترمز للدالة   (٢) د(س) ترمز لقاعدة الدالة   (٣) ص(د) ترمز لمجموعة أصفار الدالة د

مثال توضيحي أوجد مجموعة أصفار كل من دوال كثيرات الحدود المعرفة بالقواعد الآتية في ح

① د(س) = ٢س – ٦   ② ك(س) = س^{٢} – ٧س

③ ن(س) = س^{٢}+٩   ④ ر(س)= س^{٢} – ٢س – ١٥

⑤ د(س)= ٩   ⑥ ق(س)= صفر

الحـــــــــــل --

① بوضع ٢س-٦=٠   ∴ ٢س=٦   ∴ س = ٣   ص(د) = {٣}

② بوضع س^{٢} – ٧س = ٠   ∴ س(س-٧)=٠   ∴ س= ٠ أو س=٧   ص(ك)= {٠ ، ٧}

③ بوضع س^{٢}+٩=٠   ∴ س^{٢} = -٩   ∴ س= ±$\sqrt{-٩}$ ∉ ح   ∴ ص(د) = $\varnothing$

④ بوضع س^{٢} – ٢س – ١٥=٠   ∴ (س-٥)(س+٣)=٠ ∴ س=٥ أو س=-٣

==

ص(ر) = { ٥ ، -٣}

⑤ ص(د) = ∅ لأنه لاتوجد قيمة لـ س تجعل الدالة د تساوى صفر

⑥ ص(ق) = ح لأن جميع الأعداد الحقيقية تكون أصفار لهذه الدالة

==

دالة الكسر الجبري

دالة الكسر الجبري هي دالة قاعدتها على صورة كسر جبري كل من بسطه ومقامه عبارة عن قاعدة دالة كثيرة حدود

المجال = ح - { أصفار المقام }

المجال المشترك لكسرين أو أكثر = ح – { أصفار المقامات }

مجموعة أصفار دالة الكسر الجبري = مجموعة أصفار البسط – مجموعة أصفار المقام

مثال توضيحي : إذا كان د(س) = $\frac{\text{س} - ٥}{\text{س}^٢ - ٢٥}$ ، ك (س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٤}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦}$

① أوجد مجال كل من د(س) ، ك(س) ② أوجد المجال المشترك للدالتين د ، ك

③ أوجد كلا من ص(د) ، ص(ك)

الحـــــــــل---

① مجال د(س) = ح – {٥ ، -٥} ، مجال ك(س) = ح – { ٢ ، ٣}

② المجال المشترك للدالتين د ، ك = ح – { ٢ ، ٣ ، ٥ ، -٥ }

③ ص(د) = { ٥ } – { ٥ ، -٥ } = ∅ ، ص(ك) = { ٢ ، -٢ } – { ٢ ، ٣ } = { -٢ }

اختزال الكسر الجبري

تعريف

يقال إن الكسر الجبري في أبسط صورة له إذا لم توجد عوامل مشتركة بين بسطه ومقامه

خطوات اختزال (اختصار) الكسر الجبري:

① نحلل كلا من البسط والمقام تحليلا كاملا

② نعين مجال الكسر الجبري قبل حذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام

③ نحذف العوامل المشتركة بين بسط ومقام الكسر الجبري وبذلك نحل على أبسط صورة للكسر الجبري

تساوى كسرين جبريين

نقول إن الدالتين ن١ ، ن٢ متساويتان إذا تحقق الشرطان الآتيان معا

① مجال ن١ = مجال ن٢ ② اختزال ن١ = اختزال ن٢

ملحوظة : إذا كان مجال ن١ ≠ مجال ن٢ ، اختزال ن١ = اختزال ن٢

في هذه الحالة نقول أن الدالتين متساويتان في المجال المشترك

أو الدالتان تأخذان نفس القيم في المجال المشترك

$$د(س) = \frac{س + ١}{س^٢ - ٩}$$

المعكوس الجمعي = $\frac{- س - ١}{س^٢ - ٩}$ أو $\frac{س + ١}{٩ - س^٢}$ أو - $\frac{س + ١}{س^٢ - ٩}$

المعكوس الضربى = $\frac{س^٢ - ٩}{س + ١}$

مجال المعكوس الجمعي = مجال الكسر الجبري

مجال المعكوس الضربى = ح- { أصفار البسط والمقام }

العمليات على الأحداث

التجربة العشوائية: هي تجربة تستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل اجرائها ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلا .

فضاء العينة (ف): هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية وعدد عناصرها ن

الحدث: هو مجموعة جزئية من فضاء العينة فإذا كان ٲ حدث في ف فإن ٲ ⊂ ف وعدد عناصره ن(ٲ)

وهو عدد فرص وقوع الحدث ٲ

فيكون : احتمال أي حدث ٲ ⊂ ف ويرمز له بالرمز ل (ٲ) حيث

$$ل\,(ٲ) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث (ٲ)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$$

ملاحظات : ① ٠ ≤ ل (ٲ) ≤ ١ أي أن ل (ٲ) ∈ [٠ ، ١]

② احتمال الحدث المؤكد = ١

③ احتمال الحدث المستحيل = صفر

④ العدد المتوقع لحدوث نواتج معينة = احتمال حدوثها × العدد الكلى للمفردات المعطاة

الأحداث المتنافية :

يقال إن الحدثين ٲ ، ب متنافيان إذا كان ٲ ∩ ب = ∅ ويكون ل (ٲ ∩ ب) = صفر

ل (ٲ ∩ ب) يعنى احتمال وقوع الحدثين ٲ ، ب معا

ل (ٲ ∪ ب) يعنى احتمال وقوع الحدثين ٲ أوب أو كلاهما (أى احتمال وقوع أحدهما على الأقل)

إذا كان ٲ ⊂ ب فإن ① ل (ٲ ∩ ب) = ل (ٲ)

② ل (ٲ ∪ ب) = ل (ب)

** ل (ٲ ∪ ب) = ل (ٲ) + ل (ب) - ل (ٲ ∩ ب)

إذا كان الحدثان ٲ ، ب متنافيان فإن ل (ٲ ∪ ب) = ل (ٲ) + ل (ب)

ل (ٲ ∩ ب) = ل (ٲ) + ل (ب) - ل (ٲ ∪ ب)

الحدث المكمل : إذا كان ٲ حدثا من فضاء العينة ف (ٲ ⊂ ف) فإن

الحدث المكمل للحدث ٲ يرمز له بالرمز ٲ َ وهو حدث عدم وقوع ٲ حيث

① ٲ ∪ ٲ َ = ف ② ٲ ∩ ٲ َ = ∅ وبالتالي فإن ٲ ، ٲ َ حدثان متنافيان

∵ ٲ ∪ ٲ َ = ف ∴ ل (ٲ ∪ ٲ َ)=ل(ف) = ١

∴ ل (ٲ) + ل(ٲ َ) = ١ وبالتالي فإن ل (ٲ) = ١- ل(ٲ َ) ، ل (ٲ َ) = ١- ل(ٲ)

ملحوظة : إذا كان ل (ٲ) = ل(ٲ َ) فإن ل (ٲ) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ٲ َ) = $\frac{١}{٢}$

* ل (ٲ – ب) = ل (ٲ) - ل (ٲ ∩ ب) وهو يعن وقوع الحدث ٲ وعدم وقوع الحدث ب

اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر 01005751300

أمثلة محلولة :

س١: إذا كان ٲ ، ب حدثين من فضاء عينة لتجربة عشوائة وكان ل(ب) = $\frac{١}{١٢}$ ، ل (ٲ ∪ ب) = $\frac{١}{٣}$ فأوجد ل(ٲ)
إذا كان ① ٲ ، ب متنافيين ② ب ⊂ ٲ

الحـــــــــل

① ∵ ٲ ، ب متنافيين ∴ ل (ٲ ∩ ب) = صفر

∴ ل (ٲ ∪ ب) = ل(ٲ) + ل(ب) ∴ ل(ٲ) = ل (ٲ ∪ ب) – ل(ب) = $\frac{١}{٣}$ - $\frac{١}{١٢}$ = $\frac{١}{٤}$

② ∵ ب ⊂ ٲ ∴ ل(ٲ ∪ ب) = ل(ٲ) ∴ ل(ٲ) = $\frac{١}{٣}$

س٢: إذا كان ٲ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ٲ - ب) = $\frac{١}{٢}$ ، ل (ٲ ∪ ب) = $\frac{٣}{٥}$
فأوجد ل(ٲ) إذا كان ① ل(ٲ) ② ل (بَ)
③ احتمال عدم وقوع الحدثين ٲ ، ب معا

الحـــــــل

① ∵ ٲ ، ب متنافيين ∴ ل (ٲ - ب) = ل(ٲ) = $\frac{١}{٢}$

② ∵ ٲ ، ب متنافيين ∴ ل (ٲ ∪ ب) = ل(ٲ) + ل(ب)

$\frac{٣}{٥}$ = $\frac{١}{٢}$ + ل(ب) ل(ب) = $\frac{٣}{٥}$ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{١٠}$

③ ∵ ٲ ، ب متنافيين ∴ ل (ٲ ∩ ب) = صفر

∴ احتمال عدم وقوع الحدثين ٲ ، ب معا = ل (ٲ ∩ ب)َ = ١- ل (ٲ ∩ ب) = ١ – ٠ = ١

س٣ : إذا كان ٲ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة لتجربة عشوائية وكان ل(ٲ) = $\frac{٥}{٩}$ ، ل (ٲ∩ب) = $\frac{١}{٩}$
،ل(ب) = $\frac{٢}{٩}$ أوجد ① احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
② احتمال عدم وقوع أى من الحدثين ③ احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر

الحــــل

① احتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل = ل (ٲ ∪ ب) = ل(ٲ) + ل(ب) - ل (ٲ ∩ ب) = $\frac{٢}{٣}$

② احتمال عدم وقوع أى من الحدثين = ل (ٲ ∪ ب)َ = ١ - $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{١}{٣}$

③ احتمال وقوع أحد الحدثين دون وقوع الآخر = ل (ٲ – ب) + ل (ب – ٲ) = $\frac{٥}{٩}$

س٤ : مجموعة بطاقات مرقمة من ١ إلى ٣٠ خلطت جيدا ، فإذا سحبت منها بطاقة عشوائيا . احسب احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة تحمل

① عدد مضاعفا للعدد ٦ ② عدد مضاعفا للعدد ٨

③ عددا مضاعفا للعددين ٦ ، ٨ معا ④ عددا مضاعفا للعدد ٦أو ٨

الحـــــل

قبل البدء في الحل يجب عليك أولا أن تعرف ما معنى مضاعفات العدد

مضاعفات أي عدد : هي كل الأعداد التي تقبل القسمة على هذا العدد وهى دائما مجموعة لا نهائية من الأعداد

ولكى تحصل على مضاعفات أى عدد بسهولة اضرب هذا العدد فى ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

① مضاعفات العدد ٦ من ١ الى ٣٠ هى ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ وبالتالى يكون قيمة الاحتمال = $\frac{٥}{٣٠}$ = $\frac{١}{٦}$

② مضاعفات العدد ٨ من ١ الى ٣٠ هى ٨ ، ١٦ ، ٢٤ وبالتالى يكون قيمة الاحتمال = $\frac{٣}{٣٠}$ = $\frac{١}{١٠}$

③ مضاعفات العددين ٦ ، ٨ معا = { ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ } $\cap$ { ٨ ، ١٦ ، ٢٤ } = { ٢٤ }

∴ قيمة الاحتمال = $\frac{١}{٣٠}$

④عددا مضاعفا للعدد ٦أو ٨ = { ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠ } $\cup$ { ٨ ، ١٦ ، ٢٤ }

= { ٦ ، ١٢ ، ١٨ ، ٢٤ ، ٣٠، ٨ ، ١٦ } ∴ قيمة الاحتمال = $\frac{٧}{٣٠}$

س٥ : فصل دراسي به ٤٠ طالب نجح منهم ٣٠ طالبا في الرياضيات ، ٢٤ طالبا في العلوم ، ٢٠ طالبا في الامتحانين معا ، فإذا اختير طالب عشوائيا . أوجد احتمال أن يكون الطالب المختار

① ناجحا في الرياضيات ② ناجحا في العلوم فقط

③ ناجحا في أحد الامتحانين على الأقل

الحـــــل

بفرض ٲ هو حدث نجاح الطالب في الرياضيات ، ب هو حدث نجاح الطالب فى العلوم

∴ ل (ٲ) = $\frac{٣٠}{٤٠}$ =$\frac{٣}{٤}$ ، ل (ب) = $\frac{٢٤}{٤٠}$ = $\frac{٣}{٥}$ ، ل (ٲ $\cap$ ب) = $\frac{٢٠}{٤٠}$= $\frac{١}{٢}$

① ناجحا في الرياضيات = ل (ٲ) = $\frac{٣}{٤}$

② ناجحا في العلوم فقط = ل (ٲ – ب) = ل (ٲ) - ل (ٲ $\cap$ ب) = $\frac{٣}{٤}$ - $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٤}$

③ ناجحا في أحد الامتحانين على الأقل = ل (ٲ $\cup$ ب) = ل (ٲ) + ل(ب) - ل (ٲ$\cap$ ب)= $\frac{٣}{٤}$+ $\frac{٣}{٥}$ - $\frac{١}{٢}$ =$\frac{١٧}{٢٠}$

اعداد الأستاذ/ هشام ابراهيم أبو قمر 01005751300