الإحتمال

تعاريف

* **التجربة العشوائية** : هى تجربة نستطيع معرفة جميع نواتجها الممكنة قبل إجرائها ، ولكن لا يمكن تحديد الناتج الذى سيحدث فعلاً

* **فضاء العينة** : هو مجموعة جميع النواتج الممكنة للتجربة العشوائية و عدد عناصرها هو ن (ف)

* **الحدث** : هو مجموعة جزئية من فضاء العينة فإذا كان : أ حدث فى ف فإن : أ ⊂ ف و عدد عناصره هو : ن (أ) أى عدد فرص وقوع الحدث أ

* **الحدث المستحيل " ∅ "** = : هو الحدث الذى لا يمكن وقوعه

* **الحدث المؤكد** : هو الحدث الذى له كل النواتج الممكنة

* **الحدث البسيط** : هو حدث يتكون من عنصر واحد و يسمى حدث أولى

* **الحدث المركب** : هو حدث يتكون من أكثر من عنصر و يسمى حدث غير بسيط

* **الحدثان المتنافيان** : هما حدثان لا يمكن وقوعهما معاً أى أن : هما حدثان تقاطعهما = ∅

ملاحظة : الأحداث البسيطة فى فضاء العينة تكون متنافية مثنى مثنى

مسلمات الإحتمال

إذا كان : أ حدثاً من أحداث فضاء العينة لتجربة عشوائية ما أى أ ⊂ ف فإن :

(١) إحتمال الحدث أ " ل (أ) " هو عدد حقيقى يحقق ما يأتى : ل (أ) = ن (أ) / ن (ف)

حيث : ٠ ≤ ل (أ) ≤ ١

أى أن : ل (أ) ∈ [٠ ، ١]

(٢) ل (ف) = ١

أى أن : إحتمال الحث المؤكد = ١

(٣) ل (∅) = صفر

أى أن : إحتمال الحدث المستحيل = صفر

(٤) إذا كان : أ ، ب حدثين متنافيين من فضاء عينة فإن : ل (أ ∩ ب) = صفر ، ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب)

(٥) إذا كان : ف = { $أ_1$ ، $أ_2$ ، $أ_3$ ، ... ، $أ_ن$ } فإن : ل ($أ_1$) + ل ($أ_2$) + ل ($أ_3$) + ... ل ($أ_ن$) = ١

(٦) إذا كان : أ ، ب حدثين من فضاء عينة ، أ ⊂ ب فإن : ل (أ ∩ ب) = ل (أ) ، ل (أ ∪ ب) = ل (ب)

العمليات على الأحداث

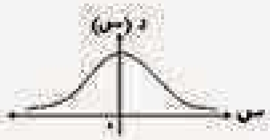
الصورة الرمزية	الصورة اللفظية
ل (أ ∪ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع الحدث أ أو الحدث ب إحتمال وقوع كلا الحدثين إحتمال وقوع أحد الحدثين على الأقل
ل (أ ∩ ب) = ل (أ) + ل (ب) − ل (أ ∪ ب)	إحتمال وقوع أ و ب إحتمال وقوعهما معا
ل (أ′) = ١ − ل (أ)	إحتمال عدم وقوع أ
ل (أ − ب) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب) ل (أ ∩ ب′) = ل (أ) − ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أ فقط إحتمال وقوع أ و عدم وقوع ب
ل (ب − أ) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب) ل (أ′ ∩ ب) = ل (ب) − ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع ب فقط إحتمال وقوع ب و عدم وقوع أ
ل (أ ∪ ب′) = ١ − ل (ب − أ) ل (ب − أ)′ = ١ − ل (ب − أ)	إحتمال عدم وقوع ب فقط إحتمال وقوع أ أو عدم وقوع ب
ل (أ′ ∪ ب) = ١ − ل (أ − ب) ل (أ − ب)′ = ١ − ل (أ − ب)	إحتمال عدم وقوع أ فقط إحتمال وقوع ب أو عدم وقوع أ
ل (أ′ ∪ ب′) = ١ − ل (أ ∩ ب) ل (أ ∩ ب)′ = ١ − ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع حدث واحد على الأكثر إحتمال عدم وقوع أ و ب معا
ل (أ′ ∩ ب′) = ١ − ل (أ ∪ ب) ل (أ ∪ ب)′ = ١ − ل (أ ∪ ب)	إحتمال عدم وقوع أحدهما على الأقل إحتمال عدم وقوع أ أو ب
ل [(أ − ب) ∪ (ب − أ)] = ل (أ) + ل (ب) − ٢ ل (أ ∩ ب)	إحتمال وقوع أحدهما فقط إحتمال وقوع أ أو ب فقط إحتمال وقوع أحدهما دون الآخر

التوزيع الطبيعى

خواصه

١ – المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات
٢ – متماثل بالنسبة للمستقيم : س = μ
٣ – له قيمة واحدة عند س = μ
٤ – يتزايد فى]−∞ ، μ[، و يتناقص فى]μ ، ∞[
٥ – يقترب طرفاه من محور السينات دون أن يقطعه

هو توزيع لمتغير عشوائى س متصل مداه]−∞ ، ∞[و دالة كثافة الإحتمال له دالة أسية تعتمد على القيمتين μ ، σ لهذا المتغير العشوائى س



التوزيع الطبيعى المعيارى

هو توزيع طبيعى وسطه الحسابى μ = صفر ، و إنحرافه المعيارى σ = ١

خواصه

١ – المنحنى متصل و يقع بأكمله فوق محور السينات
٢ – متماثل بالنسبة للمستقيم : س = صفر
٣ – المساحة فوق محور السينات و تحت المنحنى = ١ و المستقيم س = صفر يقسم هذه المساحة إلى قسمين متساويين كل منهما = ٠,٥
٤ – مساحة المنطقة الواقعة أسفل المنحنى و فوق الفترة [أ ، ب] تمثل عدداً إحتمال وقوع المتغير العشوائى س فى [أ ، ب] أى أن :
ل (أ ≤ س ≤ ب) = مساحة المنطقة الواقعة تحت المنحنى و فوق [أ ، ب]

حساب الإحتمالات لمتغير طبيعى

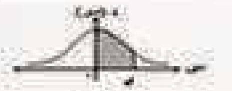
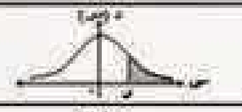
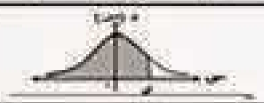
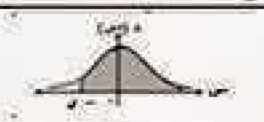
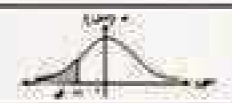
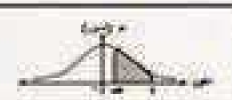
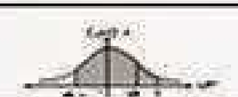
غير معيارى

قاعدة التحويل الى متغير طبيعى معيارى :

إذا كان س متغير طبيعى غير معيارى وسطه الحسابى μ و إنحرافه المعيارى σ نحول هذا المتغير الى متغير طبيعى معيارى ص بالقاعدة $ص = \frac{س - \mu}{\sigma}$ و يكون :

$$ل(أ \le س \le ب) = ل\left(\frac{أ - \mu}{\sigma} \le ص \le \frac{ب - \mu}{\sigma}\right)$$

معيارى

الإحتمال المطلوب حيث : ى عدد موجب	صورته المستخدمة فى الجدول	المساحة التى تمثله
ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	يكشف من الجدول مباشرة	
ل (− ى ≤ ص ≤ ٠)	ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	
ل (ص ≥ ى)	٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	
ل (ص ≤ ى)	٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	
ل (ص ≥ − ى)	٠,٥ + ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	
ل (ص ≤ − ى)	٠,٥ − ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	
ل (حـ ≤ ص ≤ ء) حـ ، ء موجبان ، حـ > ء	ل (٠ ≤ ص ≤ ء) − ل (٠ ≤ ص ≤ حـ)	
ل (− ء ≤ ص ≤ − حـ) حـ ، ء موجبان ، حـ > ء	ل (حـ ≤ ص ≤ ء) = ل (٠ ≤ ص ≤ ء) − ل (٠ ≤ ص ≤ حـ)	
ل (− حـ ≤ ص ≤ ء) حـ ، ء موجبان ، حـ > ء	ل (٠ ≤ ص ≤ ء) + ل (٠ ≤ ص ≤ حـ)	
ل (− ى ≤ ص ≤ ى)	٢ ل (٠ ≤ ص ≤ ى)	

حساب قيمة عدد إذا علمت المساحة

	أ < ٠,٥	أ > ٠,٥
ل (ص ≥ ى) = أ	ى موجب	ى سالب
ل (ص ≤ ى) = أ	ى سالب	ى موجب
	ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = ٠,٥ − أ	ل (٠ ≤ ص ≤ ى) = أ − ٠,٥
	نبحث فى الجدول عن قيمة ى التى تناظر المساحة الناتجة	

الإنحدار

شكل الإنحدار لمتغيرين

عند دراسة العلاقة بين المتغيرين س ، ص فإنه يمكن تمثيل الأزواج المرتبة الممثلة لهذه العلاقة بنقط فى المستوى و يسمى الشكل الناتج " شكل الإنتشار " للمتغيرين س ، ص و قد يأخذ هذا الشكل صوراً مختلفة " مستقيم ،أو منحنى "

خط الإنحدار

إذا كانت العلاقة بين المتغيرين س ، ص خطية فإنه يعبر عنها بخط مستقيم يسمى خط الإنحدار

طرق إيجاد معادلة خط الإنحدار

المربعات الصغرى

معادلة إنحدار ص على س هى : ص = أ س + ب

" حيث أ معامل إنحدار ص على س "

$$أ = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2}$$

$$، ب = \frac{\text{مجـ ص} - أ \text{ مجـ س}}{\text{ن}}$$

معادلة إنحدار س على ص ى : س = حـ ص + ء

" حيث حـ معامل إنحدار س على ص "

$$حـ = \frac{\text{ن مجـ س ص} - \text{مجـ س} \times \text{مجـ ص}}{\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}$$

$$، ء = \frac{\text{مجـ س} - \text{حـ مجـ ص}}{\text{ن}}$$

جدول حساب أ ، ب ، حـ ، ء

هو نفس جدول حساب معامل إرتباط بيرسون

ملاحظة

يحذف العمود غير المناسب من الجدول

الإنحرافات

تعتمد على تصغير الأعداد الحسابية المستخدمة لحساب أ ، ب ، حـ ، ء و ذلك بوضع :

س̃ = س − و ، ص̃ = ص − هـ

حيث : و ، هـ أى عددين ثابتين يتم إختيارهما حسب ظروف المسألة ثم نوجد معادلة خط الإنحدار المطلوبة بدلالة س̃ ، ص̃ و بالتعويض عنهما نحصل على المعادلة المطلوبة بدلالة س ، ص و تكون قيمة أ هى قيمة معامل إنحدار ص̃ على س̃ و فى نفس الوقت هى معامل إنحدار ص على س و كذلك قيمة حـ هى معامل س على ص

الجدول المستخدم

س	ص	س̃ = س − و	ص̃ = ص − هـ	س̃²	ص̃²	س̃ ص̃
		مجـ س̃	مجـ ص̃	مجـ س̃²	مجـ ص̃²	مجـ س̃ ص̃

ملاحظة

يحذف العمود غير المناسب من الجدول

العلاقة بين معامل الإنحدار و معامل الإرتباط

ر² = أ × حـ حيث :

ر يأخذ نفس لإشارة كل من أ ، حـ

المتغير العشوائى

إذا كان : ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ما ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن : أى دالة س : ف ← ح تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف

المتغير العشوائى المتقطع " المنفصل ، الوثاب "

هو متغير عشوائى مداه مجموعة محدودة من الأعداد الحقيقية

التوزيع الإحتمالى المتقطع

إذا كان : س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... ، $س_ن$ }
فإن الدالة د المعرفة كالآتى :
د : { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... ، $س_ن$ } ← ح
حيث : د ($س_ر$) = ل (س = $س_ر$) لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن تحدد ما يسمى بالتوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س و الذى يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د

ملاحظات

(١) الدالة د تحقق الشرطين :

١- د ($س_ر$) ≥ ٠ لكل ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن

٢- د ($س_1$) + د($س_2$) + د($س_3$) + ... + د($س_ن$) = ١

(٢) يكتب التوزيع الإحتمالى للمتغير العشوائى س بالصورة
{($س_1$ ، د($س_1$))، ($س_2$ ، د($س_2$))، ....، ($س_ن$ ، د($س_ن$))} أو فى صورة جدول :

$س_ر$	$س_1$	$س_2$	$س_3$	...	$س_ن$
د ($س_ر$)	د ($س_1$)	د ($س_2$)	د ($س_3$)	...	د ($س_ن$)

التوزيع الإحتمالى

الوسط الحسابى و التباين و الإنحراف المعيارى

إذا كان : س متغير عشوائى متقطع مداه المجموعة { $س_1$ ، $س_2$ ، $س_3$ ، .... ، $س_ن$ } بإحتمالات د($س_1$) ، د($س_2$) ، د ($س_3$) ، .... ، د ($س_ن$) على الترتيب فإن :

الوسط الحسابى " التوقع " $(\mu) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر)$

التباين : $(\sigma^2) = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \cdot د(س_ر) - \mu^2$

الإنحراف المعيارى : $(\sigma) = \sqrt{(\sigma^2)}$

جدول حساب (μ) ، (σ²) ، (σ)

$س_ر$	د ($س_ر$)	$س_ر \cdot د(س_ر)$	$س_ر^2 \cdot د(س_ر)$
		$\mu = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر \cdot د(س_ر)$	$\sigma^2 = \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 \cdot د(س_ر) - \mu^2$

معامل الإختلاف = $\dfrac{\text{الإنحراف المعيارى}}{\text{الوسط الحسابى}}$

المتغير العشوائى المتصل

هو متغير عشوائى مداه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية

التوزيع الإحتمالى المتقطع

إذا كان س متغير عشوائى متصل مداه الفترة [أ ، ب] ، الدالة د حيث د : [أ ، ب] ← ح بحيث تحقق :

(١) د (س) ≥ ٠ لكل س ∈ [أ ، ب]

(٢) الشكل البيانى لهذه الدالة هو منحنى متصل بحيث تكون مساحة المنطقة أسفل منحنى الدالة و فوق [أ ، ب] مساوية للواحد الصحيح

دالة الكثافة

إذا كان س متغير عشوائى متصل فإن الدالة الحقيقية د تسمى دالة كثافة المتغير العشوائى س إذا كان :
ل (أ ≤ س ≤ ب) = مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى د و فوق محور السينات فى [أ ، ب] و ذلك لكل عددين حقيقيين أ ، ب حيث أ ≤ ب

الإرتباط

هو علاقة بين متغيرين (ظاهرتين) او أكثر

درجات الإرتباط :

(١) الإرتباط التام : فيه يمكن معرفة قيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر

(٢) الإرتباط الصفرى (المنعدم) : و الذى يعنى عدم وجود أى علاقة بين المتغيرين

(٣) الإرتباط غير التام : و فيه يتبع أحد المتغيرين الآخر فى تغيره إلى حد ما

أنواع الإرتباط حسب طبيعة إتجاه المتغيرين :

(١) الإرتباط الطردى : وفيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاه واحد أى أنهما يتبعان بعضهما فى الزيادة و النقص

(٢) الإرتباط العكسى : و فيه يكون تغير المتغيرين فى إتجاهين متضادتين بحيث أن أى زيادة فى أحدهما يتبعها نقص فى الآخر أو العكس

أنواع الإرتباط حسب الوصف التحليلى لعلاقة الإرتباط :

(١) إرتباط خطى

(٢) إرتباط غير خطى

تقاس درجة العلاقة بين متغيرين بمقياس يسمى " **معامل الإرتباط** " (ر)

معامل الإرتباط

معامل إرتباط بيرسون للبيانات غير المبوبة

$$ر = \frac{\text{ن مجـ س ص} - (\text{مجـ س}) \times (\text{مجـ ص})}{\sqrt{\text{ن مجـ س}^2 - (\text{مجـ س})^2} \times \sqrt{\text{ن مجـ ص}^2 - (\text{مجـ ص})^2}}$$

بعض خصائص معامل الإرتباط (ر) :

(١) ر تكون موجبة فى حالة الإرتباط الطردى و سالبة فى حالة الإرتباط العكسى

(٢) ر = صفر فى حالة الإرتباط المنعدم

(٣) ر = ١ فى حالة الإرتباط الطردى التام ، ر = − ١ فى حالة الإرتباط العكسى التام

(٤) ر $\in$ [− ١ ، ١]

(٥) معامل إرتباط بيرسون لا يتغير إذا طرحنا أو جمعنا أى عدد ثابت " من الممكن أن يكون الوسط الحسابى " من جميع قيم المتغير س ، و أى عدد ثابت آخر من قيم المتغير ص

جدول حساب معامل إرتباط بيرسون

س	ص	$س^2$	$ص^2$	س ص
مجـ س	مجـ ص	مجـ $س^2$	مجـ $ص^2$	مجـ س ص

معامل إرتباط بيرسون الرتب لسبيرمان

$$ر = 1 - \frac{6 \text{ مجـ ف}^2}{\text{ن} (\text{ن}^2 - 1)}$$

جدول حساب معامل إرتباط الرتب لسبيرمان

س	ص	رتب س	رتب ص	ف	$ف^2$
					مجـ $ف^2$