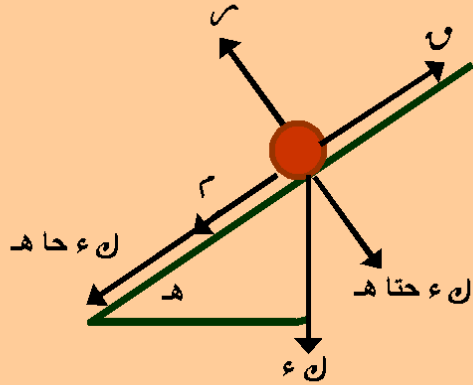


الرياضيات البحثية التفاضل و التكامل



∞

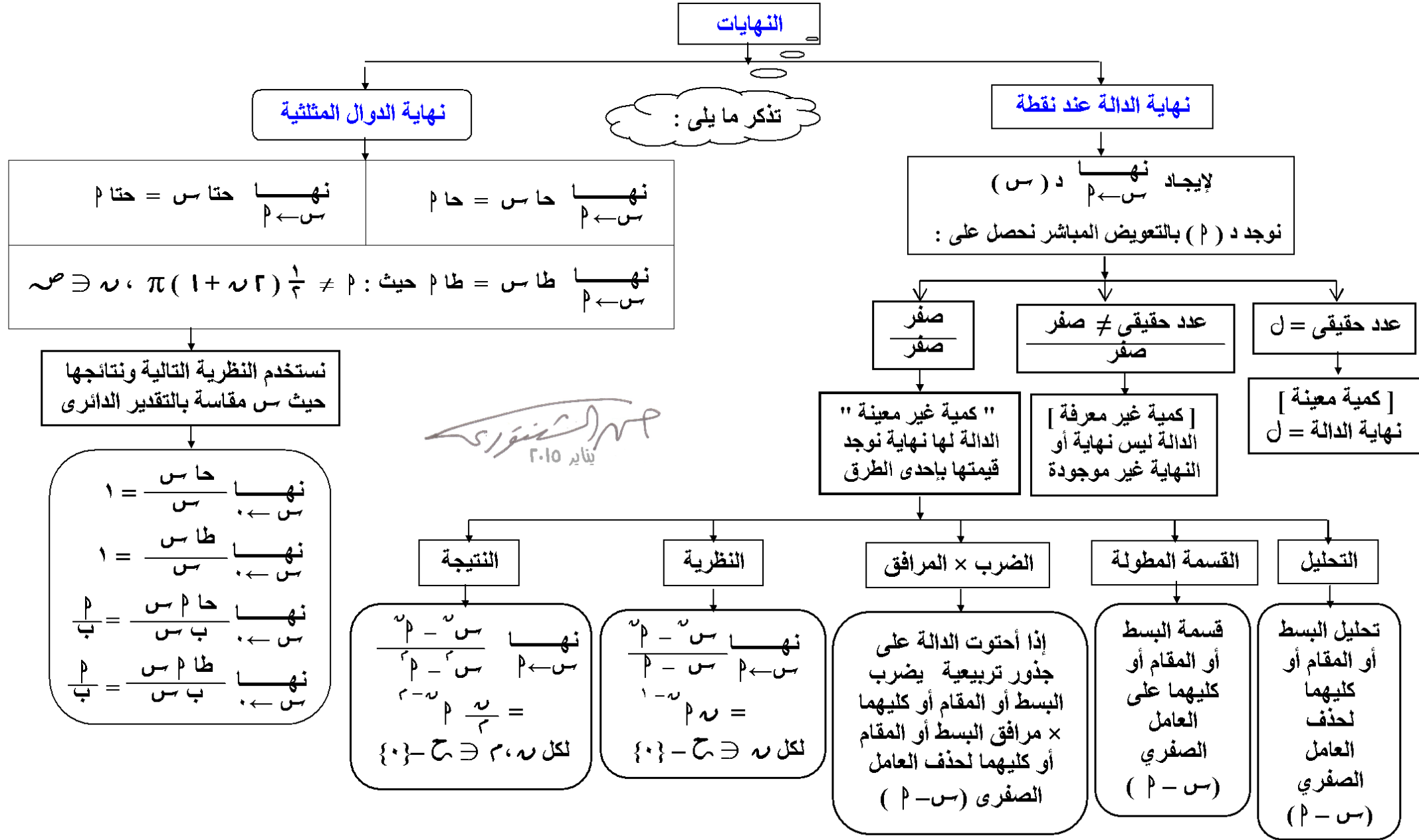
$\perp$

Σ

$\ni$

الثانوية العامة
شعبة الرياضيات

إعداد : أحمد الشنوري



نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

خطوات إيجاد نهاية الدالة المعرفة بأكثر من قاعدة

إذا كانت قاعدة الدالة تتغير حول $x = a$ نوجد كل من :

النهاية اليسرى للدالة $f(x)$ حيث :

$$f(x) = f(a^-) \text{ عندما } x < a$$

عندما : $x > a$

النهاية اليمنى للدالة $f(x)$ حيث :

$$f(x) = f(a^+) \text{ عندما } x > a$$

عندما : $x < a$

فنحصل على إحدى الحالات التالية :

$$(1) \quad f(a^-) = f(a^+) = f(a) \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\therefore f(x) = f(a) \text{ عندما } x \rightarrow a$$

$$(2) \quad f(a^-) \neq f(a^+)$$

$\therefore f(x)$ ليس لها وجود

(3) أى من $f(a^-)$ أو $f(a^+)$ غير موجودة

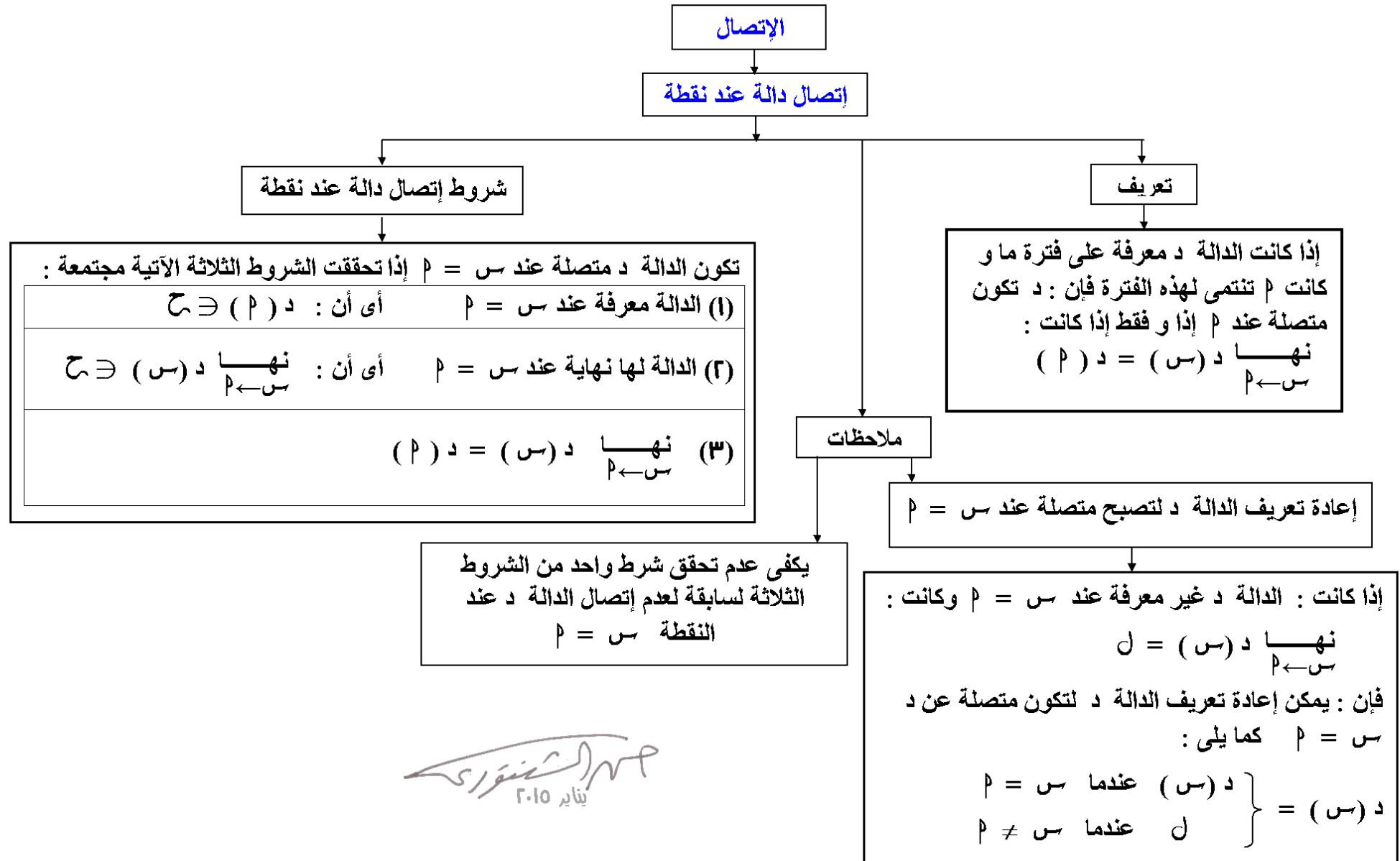
ملاحظات

نبحث النهاية عندما $x \rightarrow a$ سواء كانت الدالة معرفة أو غير معرفة عند $x = a$

إذا كانت قاعدة الدالة واحدة على يمين و يسار a مباشرة فيمكن بحث نهاية الدالة مباشرة دون بحث النهاية اليمنى و اليسرى

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة على $[a, b]$ أو (a, b) ، فليبحث نهاية الدالة عند a نبحث النهاية اليمنى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند a ، و نبحث نهاية الدالة عند b نبحث النهاية اليسرى فقط و إن وجدت تكون هى نهاية الدالة عند b

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥



أحمد الشنتورى
 يناير ٢٠١٥

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

تابع : الإتصال

إتصال دالة على فترة

بعض أنماط الدوال المتصلة

دوال كثيرات الحدود : متصلة على $\mathbb{R}$ أو أى فترة جزئية من $\mathbb{R}$
الدوال الكسرية الجبرية : متصلة على $\mathbb{R}$ أو أى فترة جزئية من $\mathbb{R}$ ما عدا عند أصفار دالة المقام
الدوال المثلثية :
$\sin(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ $\cos(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ $\tan(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$ عدا عند أصفار دالة المقام
على $\mathbb{R} - \{0\}$: $\frac{1}{x}$ متصلة

تعريف

- (١) إذا كانت الدالة f معرفة على الفترة $[a, b]$ فإن :
الدالة f تكون متصلة على f إذا كانت متصلة عند كل نقطة تنتمى لهذه الفترة
- (٢) إذا كانت الدالة f معرفة على الفترة $[a, b]$ فإن :
الدالة f تكون متصلة على f إذا تحققت الشروط الآتية :
- (١) الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$
- (٢) الدالة f متصلة من اليمين عند a أى : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- (٣) الدالة f متصلة من اليمين عند b أى : $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$

بدون برهان

نظرية

ملاحظة

إذا كانت f, g دالتين معرفتين على $[a, b]$ و كانتا متصلتين على الفترة f فإن كلاً من الدوال الآتية تكون متصلة على الفترة f :

$\frac{f}{g}$ بشرط $g \neq 0$	$f + g$	$f - g$
-------------------------------	---------	---------

- الدالة f غير متصلة على الفترة $[a, b]$ إذا وجدت نقطة واحدة على الأقل مثل $c \in [a, b]$ بحيث تكون f غير متصلة عندها أى إذا لم يتحقق أحد الشروط :
- (١) الدالة f غير معرفة عند c
- (٢) عدم وجود نهاية للدالة f عند c
- (٣) إختلاف نهاية الدالة f عند c عن $f(c)$

تذکرہ ما یلی

قواعد الاشتقاق

التغير

إذا كانت : $v = d(s)$ وتغيرت s من s_1 إلى s_2 فإن : v تتغير من $d(s_1)$ إلى $d(s_2 + h)$ ويكون التغير في s هو : h والتغير في v " دالة التغير " هو :

ت (h) = $d(s_2 + h) - d(s_1)$ و دالة متوسط التغير هي :

$$m(h) = \frac{d(s_2 + h) - d(s_1)}{h}$$

ومعدل التغير = $\lim_{h \rightarrow 0} m(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(s_2 + h) - d(s_1)}{h}$

ملاحظة

معدل التغير للدالة د عند س_١ = المشتقة الأولى
للدالة د عند س_١ = ميل المماس لمنحنى الدالة عند
النقطة (س_١، د(س_١)) = ظا θ
حيث : θ هي زاوية ميل المماس مع الإتجاه الموجب
لمحور السينات

إذا كانت : ص = د (ع) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى ع
 ، ع = ص (س) دالة قابلة للإشتقاق بالنسبة إلى س فإن :

$$\frac{ع}{س} = \frac{ص}{ع} \times \frac{ع}{ص}$$

قابلية الاشتقاق

خطوات بحث اشتقاق دالة عند نقطة معرفة بأكثر من قاعدة

تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $x = a$ تنتمي لمجال الدالة إذا كان : $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ لها وجود أى أن :

نهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ لها وجود

إذا كانت قاعدة الدالة تتغير حول $x = a$ نوجد كل من :

المشتقة اليسرى للدالة $f'(a^-)$ حيث :

$$f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

عندما : $h < 0$

المشتقة اليمنى للدالة $f'(a^+)$ حيث :

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

عندما : $h > 0$

فإذا كانت :

$$f'(a^-) = f'(a^+) \quad (1) \quad \text{فإن : } y = f(x) \text{ تكون قابلة للاشتقاق عند } x = a$$

$$f'(a^-) \neq f'(a^+) \quad (2) \quad \text{فإن : } y = f(x) \text{ تكون غير قابلة للاشتقاق عند } x = a$$

نظرية

ملاحظات

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = a$ فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة

بدون برهان

إذا كانت الدالة متصلة عند نقطة فليس شرطاً أن تكون قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة

الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة تكون متصلة عند نفس النقطة

إذا كانت الدالة غير متصلة عند $x = a$ فإنها تكون غير قابلة للاشتقاق عندها

عند بحث اشتقاق دالة عند نقطة يجب استخدام التعريف

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق تستخدم قواعد الاشتقاق السابق ذكرها

إذا كانت الدالة $y = f(x)$ معرفة على $[a, b]$ فإنه عند بحث قابلية الاشتقاق عند $x = a$ يكتفى ببحث تحقق وجود المشتقة اليمنى فقط ، و فى حالة وجودها تكون هى مشتقة الدالة ، و عند بحث قابلية الاشتقاق عند $x = b$ يكتفى ببحث تحقق وجود المشتقة اليسرى فقط ، و فى حالة وجودها تكون هى مشتقة الدالة

بحث نهاية و إتصال و إشتقاق دالة عند نقطة

د (س)

$s \neq p$

غير معرفة عند $p = s$

$p = s$

معرفة عند $p = s$

$d(-p) = d(+p)$

$d(-p) \neq d(+p)$

$d(-p) = d(+p)$

$d(-p) \neq d(+p)$

لها نهاية عند $p = s$

ليس لها نهاية عند $p = s$

لها نهاية عند $p = s$

ليس لها نهاية عند $p = s$

غير متصلة عند $p = s$

متصلة عند $p = s$

غير متصلة عند $p = s$

ليس لها مشتقة عند $p = s$

$d(-p) = d(+p) = d(p)$

متصلة عند $p = s$

ليس لها مشتقة عند $p = s$

$d'(-p) = d'(p) \neq d'(p)$

ليس لها مشتقة عند $p = s$

$d'(-p) = d'(p) = d'(p)$

لها مشتقة عند $p = s$

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

تابع : الإشتقاق

المشتقات العليا لدالة

إذا كانت الدالة $v = d(s)$ قابلة للإشتقاق عدة مرات نحصل على المشتقة الأولى ثم المشتقة الثانية (مشتقة المشتقة) ثم المشتقة الثالثة وهكذا على التوالى و تكون كل منها دالة فى s يرمز للمشتقة الثانية بأحد الرموز التالية :

$$\frac{v}{s} \quad \left(\frac{v}{s} \right) \quad \text{أو} \quad \frac{v^2}{s} \quad \text{أو} \quad v'' \quad \text{أو} \quad d''(s)$$

يرمز للمشتقة الثالثة بأحد الرموز التالية :

$$\frac{v}{s} \quad \left(\frac{v^2}{s} \right) \quad \text{أو} \quad \frac{v^3}{s} \quad \text{أو} \quad v''' \quad \text{أو} \quad d'''(s)$$

ملاحظة

إذا كانت : $v = d(s)$ ، $e = r(s)$ فإن :

$$\frac{v}{s} \times \frac{e}{e} = \frac{v}{s} \quad \text{أو} \quad \frac{v}{s} \times \left(\frac{e}{e} \right) = \frac{v}{s} \quad \text{أو} \quad \frac{v}{s} \times \frac{e}{e} = \frac{v}{s}$$

إذا كانت : $v = d(s)$ ، $e = r(s)$ دالتان قابلتان للإشتقاق عدة مرات بالنسبة إلى s فإن :

$$\frac{v}{e} \times \frac{e}{e} = \frac{v}{e} \quad \text{أو} \quad \frac{v}{e} \times \left(\frac{e}{e} \right) = \frac{v}{e} \quad \text{أو} \quad \frac{v}{e} \times \frac{e}{e} = \frac{v}{e}$$

الدالة الضمنية و الإشتقاق الضمنى

الدالة الصريحة هي : دالة على الصورة : $v = d(s)$
الدالة الضمنية هي : دالة على الصورة : $v = (s, v) = 0$
و الإشتقاق فى هذه الحالة يسمى إشتقاق ضمنى

لإيجاد $\frac{v}{s}$ للدالة الضمنية $d(s, v)$:

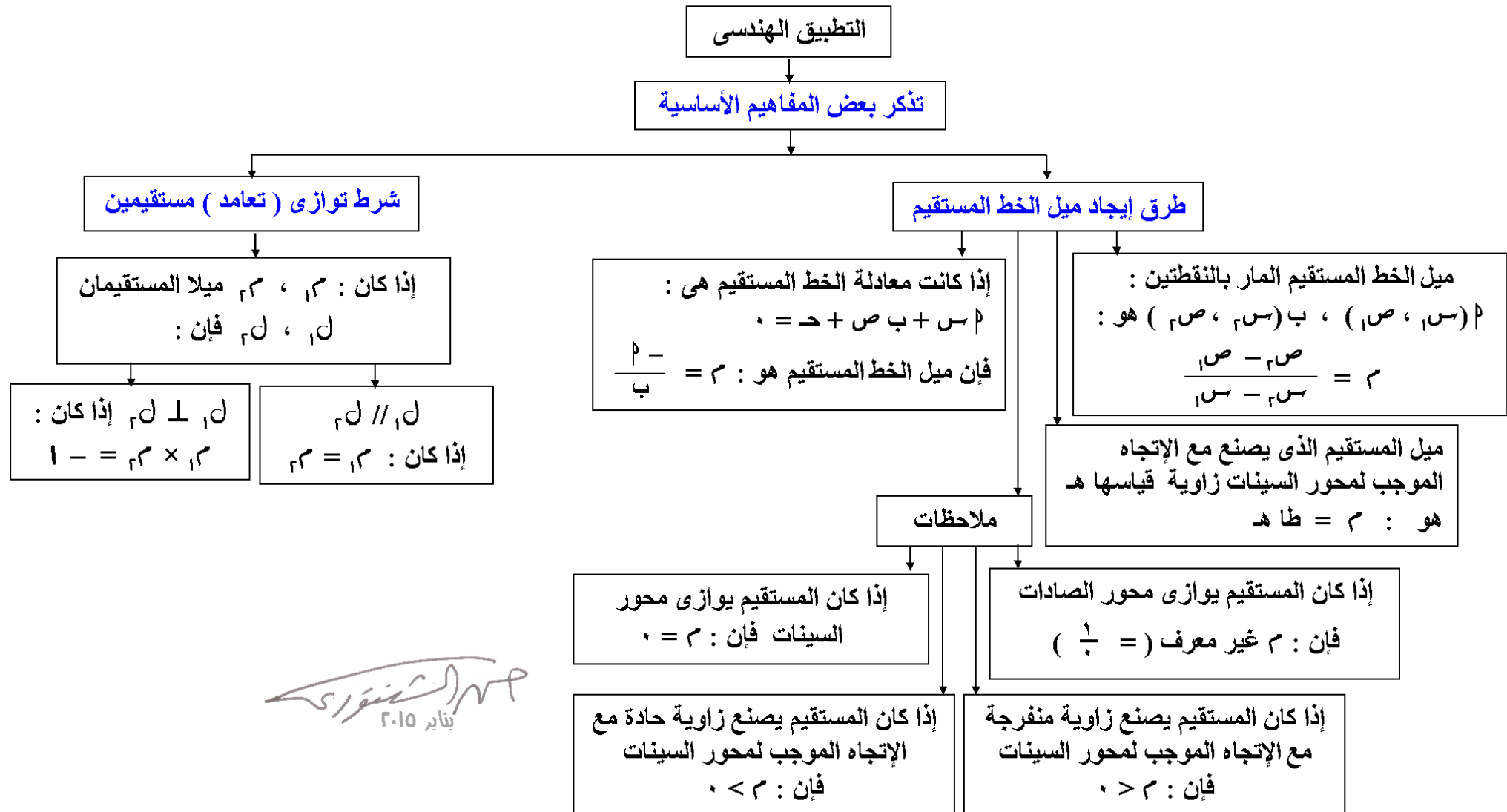
نحولها لدالة صريحة إن أمكن بفصل المتغير v فى طرف مستقل
أو : نشتق طرفى المتساوية ضمناً بالنسبة إلى s حيث :

$$\frac{v}{s} (s) = v' = v'^{-1} \times \frac{v}{s}$$

ملاحظة

من الممكن الإشتقاق بالنسبة للمتغير v
مع ملاحظة :

$$\frac{v}{s} (s) = v' = v'^{-1} \times \frac{v}{s}$$




يناير ٢٠١٥

تابع : التطبيق الهندسى

ملاحظات

إستخدام المشتقة الأولى لإيجاد ميل
المماس و العمودى على منحنى

أى نقطة تقع على منحنى تحقق معادلته
لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات نضع $y = 0$ و نوجد قيم x
لإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات نضع $x = 0$ و نوجد قيم y
لإيجاد نقط تقاطع منحنى و مستقيم أو منحنيين متقاطعين تحل معادلتيهما معاً
ميل منحنى عند نقطة عليه هو ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة
العمودى على منحنى عند نقطة عليه هو المستقيم العمودى على المماس للمنحنى عند هذه النقطة
زاوية التقاطع بين مستقيم و منحنى هى الزاوية المحصورة بين المستقيم و المماس للمنحنى عند نقطة التقاطع
زاوية التقاطع بين منحنيين هى الزاوية بين المماسيين للمنحنى عند نقط تقاطع المنحنيين ، و إذا كانت هذه قائمة فإن : المنحنيين يكونان متقاطعان على التعامد
يكون المنحنيين متماسان عند نقطة إذا كانت هذه النقطة تقع على كل منهما و يتساوى ميلا المماسان لهما عندها

ميل المماس لمنحنى الدالة $y = f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة عليه

$$= \left(\frac{f'(x_1)}{f'(x_1)} \right) (x_1, y_1)$$

ميل العمودى على منحنى الدالة $y = f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة عليه

$$= \frac{1}{\left(\frac{f'(x_1)}{f'(x_1)} \right) (x_1, y_1)}$$

معادلتا المماس و العمودى لمنحنى

معادلة العمودى للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هى :

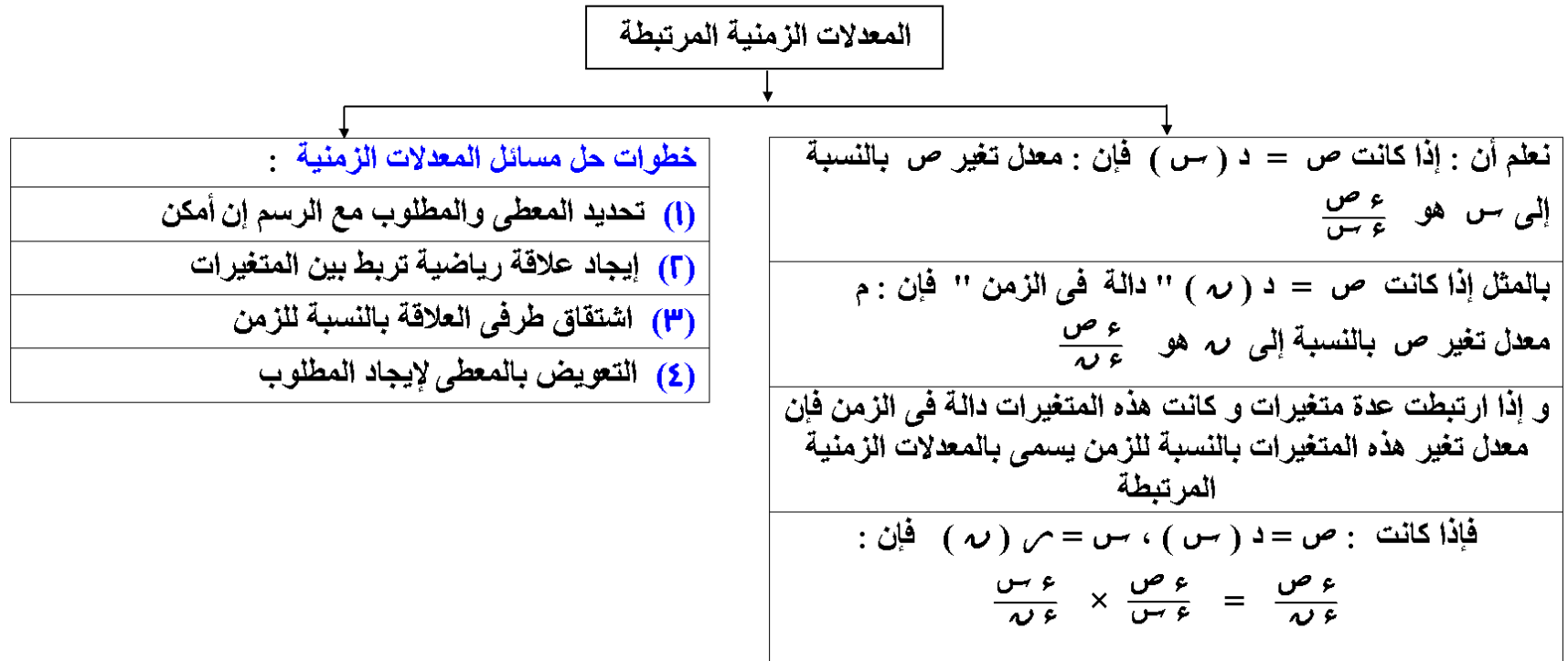
$$y - y_1 = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$$

معادلة المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة (x_1, y_1) هى :

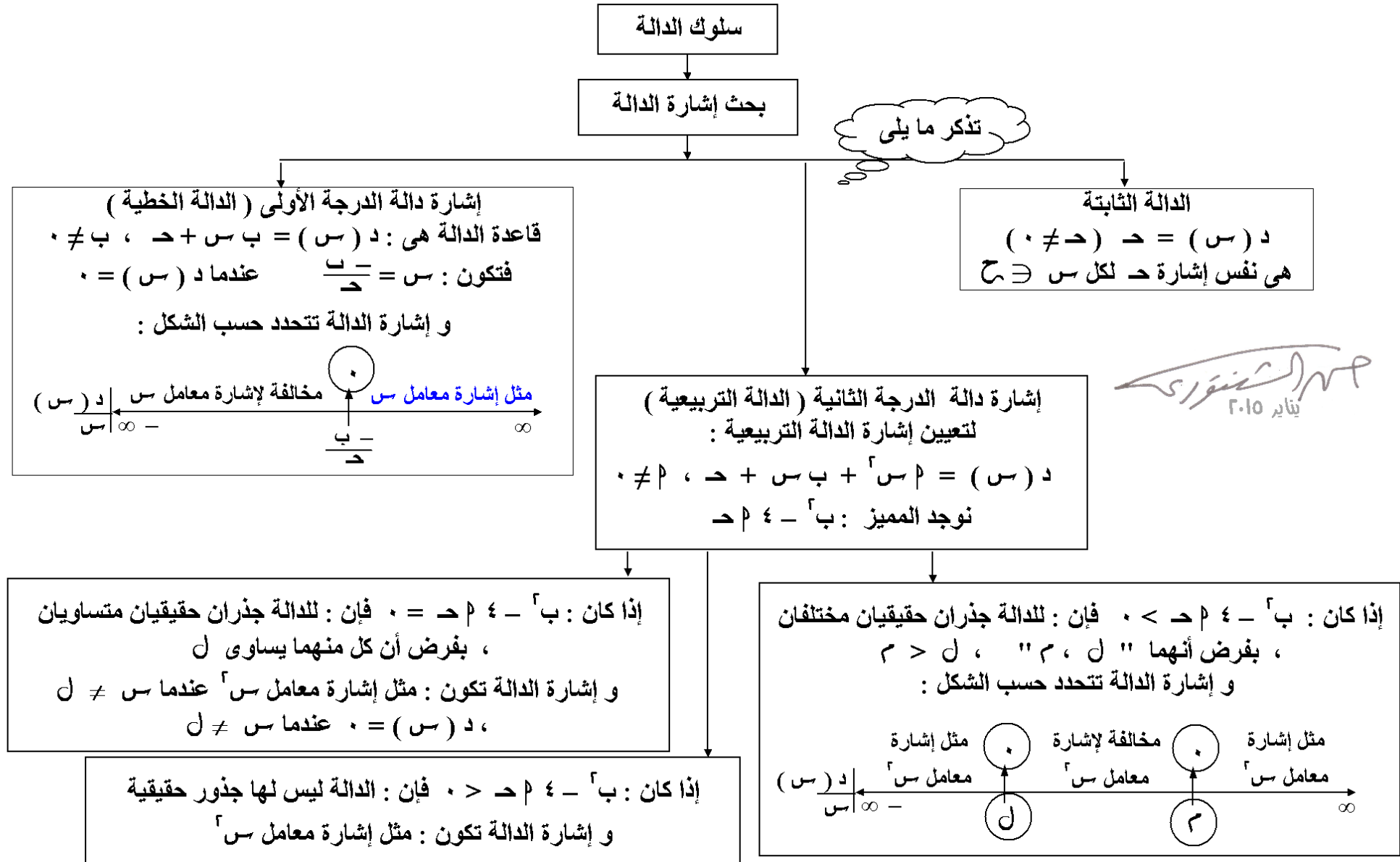
$$y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$$

حيث : m ميل المماس المرسوم لمنحنى الدالة عند النقطة (x_1, y_1) الواقعة عليه

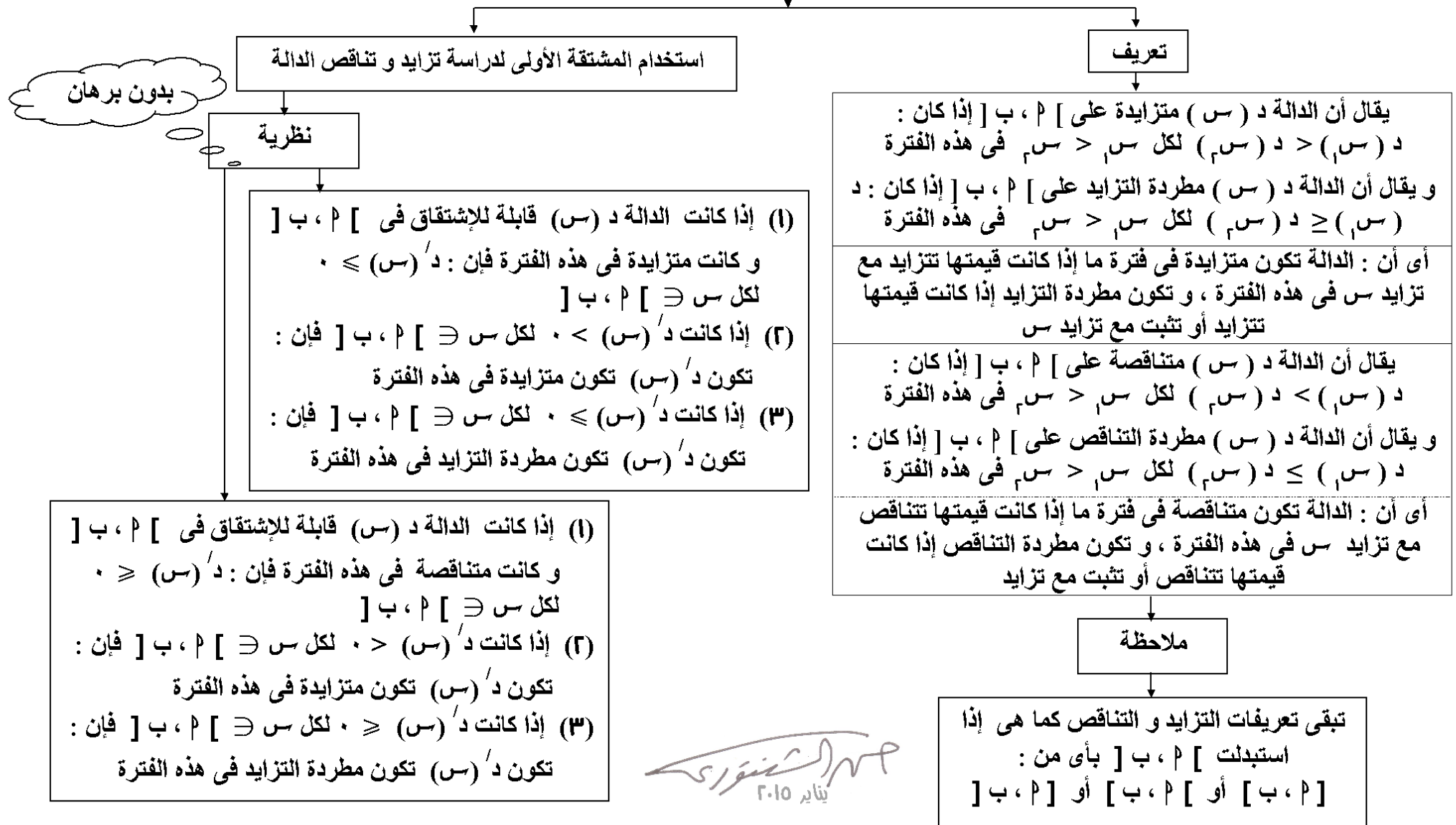
أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥



أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥



تزايد و تناقص الدالة



تابع : تزايد و تناقص الدالة

ملاحظات

الدالة تتناقص فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحنائها عند أى نقطة فى هذه الفترة سالباً
 أى أن المماس يصنع زاوية منفرجة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

الدالة تتزايد فى فترة ما إذا كان ميل المماس لمنحنائها عند أى نقطة فى هذه الفترة موجباً
 أى أن المماس يصنع زاوية حادة مع الإتجاه الموجب لمحور السينات

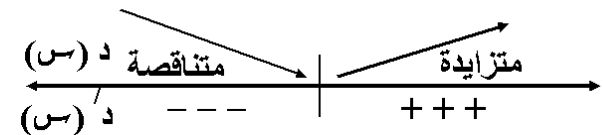
إذا كانت النقطة $s = e$ تفصل بين فترات التزايد و التناقص بحيث أن الدالة تتزايد على يسار هذه النقطة و تتناقص على يمينها فإن هذا يعنى أن قيمة الدالة تكون أكبر ما يمكن بالنسبة لقيمتها على يمين و يسار هذه النقطة

إذا كانت النقطة $s = d$ تفصل بين فترات التزايد و التناقص بحيث أن الدالة تتزايد على يمين هذه النقطة و تتناقص على يسارها فإن هذا يعنى أن قيمة الدالة تكون أقل ما يمكن بالنسبة لقيمتها على يمين و يسار هذه النقطة

خطوات ايجاد فترات تزايد و فترات تناقص الدالة

- (١) لبحث فترات تزايد الدالة $d(s)$ القابلة للإشتقاق
 نحل المتباينة $d'(s) < 0$
- (٢) لبحث فترات تناقص الدالة $d(s)$ القابلة للإشتقاق
 نحل المتباينة $d'(s) > 0$

- (١) نوجد أصفار $d'(s)$ أى قيم s التى تجعل $d'(s) = 0$ فهذه القيم هى التى تفصل بين فترات التزايد و التناقص للدالة
- (٢) ندرس إشارة $d'(s)$ فى الفترات الواقعة بين هذه القيم
- (٣) تكون $d(s)$ متزايدة فى الفترات التى تكون فيها $d'(s)$ موجبة
 ، تكون $d(s)$ متناقصة فى الفترات التى تكون فيها $d'(s)$ سالبة



أحمد الشنتورى
 يناير ٢٠١٥

القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة

ملاحظات

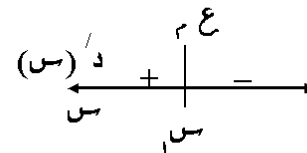
إذا كانت : الدالة $d(s)$ قابلة للإشتقاق عند s_1 و كانت : $d'(s_1) = 0$ فليس من الضرورى أن تكون s_1 نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية
 قد تكون s_1 نقطة قيمة عظمى محلية أو صغرى محلية و مع ذلك $d'(s_1)$ غير موجودة
 إذا كانت : $d''(s_1) = 0$ نستخدم المشتقة الأولى للتحقق من وجود نقط للدالة عندها قيم عظمى أو صغرى

نظريات

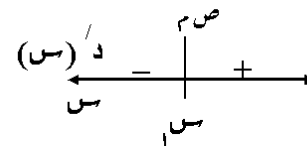
بدون برهان

إذا كانت الدالة $d(s)$ قابلة للإشتقاق و كان :
 [١] $d'(s) = 0$ ، $d''(s_1) < 0$ فإن :
 $(s_1, d(s_1))$ نقطة صغرى محلية
 [٢] $d'(s) = 0$ ، $d''(s_1) > 0$ فإن :
 $(s_1, d(s_1))$ نقطة عظمى محلية

إذا كانت الدالة $d(s)$ معرفة على $[a, b]$ و كان للدالة قيمة عظمى أو صغرى محلية عند $s_1 \in [a, b]$ فإن $d'(s_1) = 0$



إذا كانت : الدالة $d(s)$ متصلة و كان :
 [١] $d'(s) \leq 0$ لقيم s على يسار s_1 مباشر ، $d'(s) \geq 0$ لقيم s على يمين s_1 مباشرة فإن : s_1 نقطة عندها قيمة عظمى محلية



[٢] $d'(s) \geq 0$ لقيم s على يسار s_1 مباشرة ، $d'(s) \leq 0$ لقيم s على يمين s_1 مباشرة فإن : s_1 نقطة عندها قيمة صغرى محلية

أحمد الشنتورى
 يناير ٢٠١٥

تابع : القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة

النقط الحرجة للدالة

يقال أن s نقطة حرجة للدالة $d(s)$ إذا كانت تحقق
أحد الشرطين : (١) $d'(s)$ لها وجود و تساوى الصفر
(٢) $d'(s)$ غير موجودة

خطوات تعيين النقط الحرجة للدالة

(١) نوجد $d'(s)$ مع بحث قابلية الاشتقاق عند التى
يتغير عندها تعريف الدالة
(٢) نحدد النقط التى تنتمى لمجال الدالة التى تجعل
 $d'(s) = 0$ و أيضاً التى عندها الدالة غير قابلة
للاشتقاق فتكون نقط حرجة للدالة

ملاحظات

نقطة القيم العظمى المحلية و الصغرى المحلية للدالة هى نقط
حرجة لها لأن الدالة عند هذه النقط إما أنها غير قابلة للاشتقاق
أو قابلة للاشتقاق و مشتقتها تساوى صفر
ليس كل نقطة حرجة هى نقطة قيمة عظمى أو صغرى محلية لها
إذا كانت النقطة (m , n) نقطة حرجة أو عظمى محلية أو
صغرى محلية فإن : $d'(m) = 0$, $d(m) = n$

خطوات تعيين القيم العظمى و الصغرى المحلية لدالة

باستخدام المشتقة الثانية

(١) نوجد $d'(s)$, $d''(s)$
(٢) نعين النقط التى تجعل $d'(s) = 0$
(٣) نبحث إشارة $d''(s)$ عند هذه النقط
فإذا كانت :
(أ) $d''(s)$ موجبة فإن هذه النقطة
تكون عندها للدالة قيمة عظمى محلية
(ب) $d''(s)$ سالبة فإن هذه النقطة
تكون عندها للدالة قيمة صغرى محلية
(ج) $d''(s) = 0$ صفر أو غير معرفة
نستخدم المشتقة الأولى كما سبق

باستخدام المشتقة الأولى

(١) نوجد $d'(s)$
(٢) نعين النقط التى تجعل $d'(s) = 0$
(٣) نبحث تزايد و تناقص الدالة حول هذه النقط
فإذا كانت :
(أ) $d'(s)$ متزايدة على يسار إحدى
هذه النقط , متناقصة على يمينها فإن هذه
النقطة تكون عندها للدالة قيمة عظمى محلية
(ب) $d'(s)$ متناقصة على يسار إحدى
هذه النقط , متزايدة على يمينها فإن هذه
النقطة تكون عندها للدالة قيمة صغرى محلية
(ج) $d'(s)$ متزايدة (أو متناقصة) على
يسار و يمين إحدى هذه النقط فإن هذه
النقط ليس عندها للدالة قيمة عظمى
(أو صغرى) محلية

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

القيم العظمى و الصغرى المطلقة

خطوات التعيين

ملاحظات

تعريف

إذا كانت الدالة d (س) معرفة على $[a, b]$ لحساب قيمتها العظمى و الصغرى المطلقة فى تلك الفترة نتبع ما يلى :

(١) نوجد النقط الحرجة للدالة التى تنتمى لهذه الفترة أى النقط التى تكون الدالة عنها قابلة للاشتقاق و مشتقتها تساوى الصفر ، النقط التى تكون الدالة عندها غير قابلة للاشتقاق

(٢) نوجد قيم الدالة عند كل من النقط الحرجة و كذا قيم الدالة عند طرفى الفترة المعطاه

(٣) نوجد أكبر قيمة فتكون هى القيمة العظمى المطلقة للدالة ، نوجد أصغر قيمة فتكون هى القيمة الصغرى المطلقة للدالة

القيمة العظمى (أو الصغرى) المحلية لدالة هى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى جوار صغير أى جزء صغير من فترة تعريف الدالة

أما القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة للدالة فهى قيمة عظمى (أو صغرى) للدالة فى كل فترة التعريف

القيمة العظمى (أو الصغرى) المطلقة هى إحدى القيم العظمى (أو الصغرى) المحلية و لكنها أكبر (أصغر) هذه القيم جميعاً

(١) إذا كانت الدالة d (س) معرفة على $[a, b]$ فإن : القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة

$\{d(s) : s \in [a, b]\}$ أى أنها تلك القيمة c بحيث أنه توجد نقطة $s_1 \in [a, b]$ بحيث أن :

$d(s_1) = c, c \leq d(s)$

لكل $s \in [a, b]$

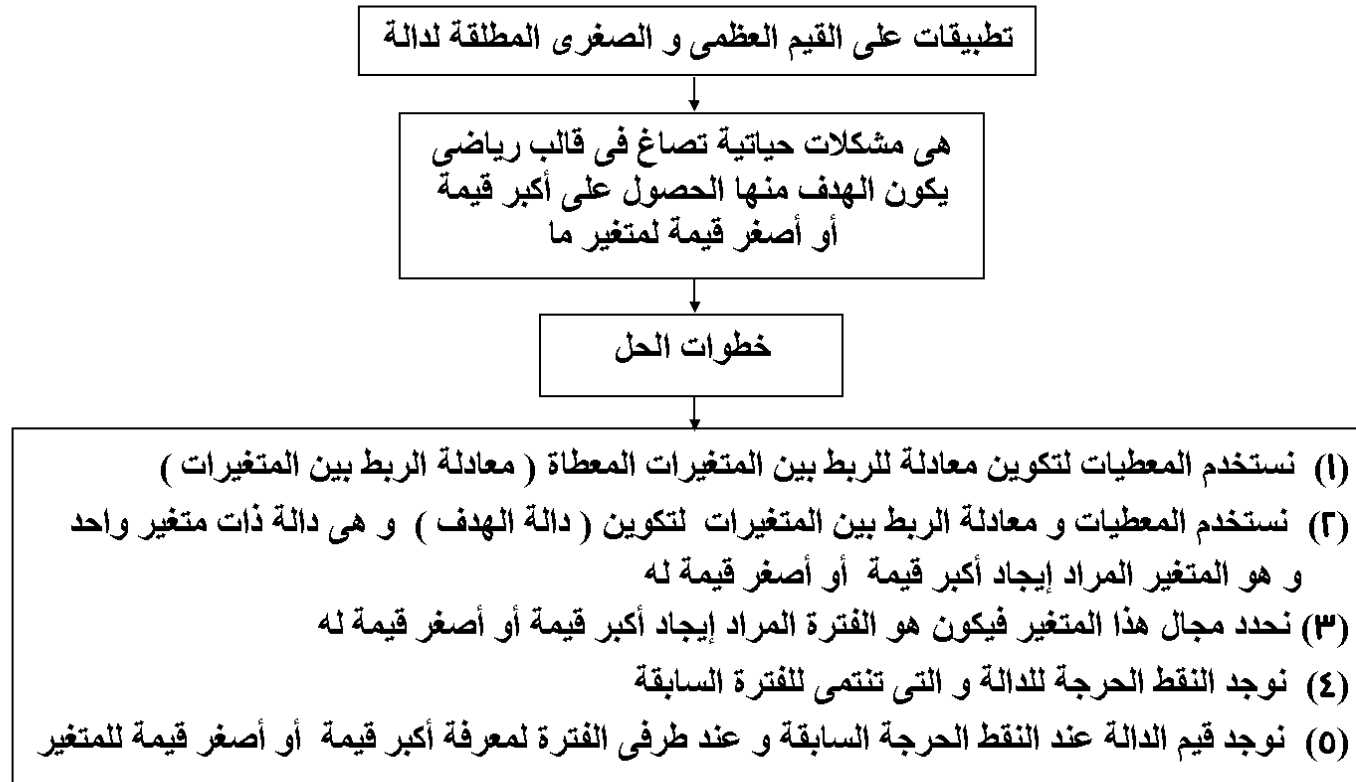
(٢) إذا كانت الدالة d (س) معرفة على $[a, b]$ فإن : القيمة العظمى المطلقة لها فى هذه الفترة هى أكبر قيمة فى مجموعة قيم الدالة

$\{d(s) : s \in [a, b]\}$ أى أنها تلك القيمة c بحيث أنه توجد نقطة $s_1 \in [a, b]$ بحيث أن :

$d(s_1) = c, c \geq d(s)$

لكل $s \in [a, b]$

أحمد الشنتورى
 يناير ٢٠١٥



أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

التحدب إلى أعلى و التحدب إلى أسفل و نقط الانقلاب

خطوات بحث تحدب منحنى و نقط
الإنقلاب لدالة قابلة للإشتقاق مرتين

نظرية

تعاريف و ملاحظات

تعاريف

وتر المنحنى

هو القطعة المستقيمة التى تصل بين أى نقطتين على المنحنى

التحدب إلى أعلى

يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أعلى إذا كان المنحنى يقع أعلى جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء

التحدب إلى أسفل

يقال لجزء متصل من منحنى أنه محدب إلى أسفل إذا كان المنحنى يقع أسفل جميع أوتاره الواصلة بين أى نقطتين من نقط هذا الجزء

نقط الانقلاب

هى النقط التى تفصل بين مناطق التحدب إلى أسفل و مناطق التحدب إلى أعلى من منحنى

ملاحظات

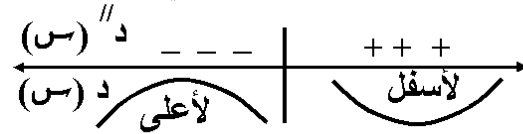
جزء المنحنى المحدب إلى أعلى كما أنه يقع أعلى أوتاره فإنه يقع أسفل المماسات للمنحنى عند جميع نقط هذا الجزء

جزء المنحنى المحدب إلى أسفل كما أنه يقع أسفل أوتاره فإنه يقع أعلى المماسات للمنحنى عند جميع نقط هذا الجزء

إذا كانت النقطة (م ، ن) نقطة إنقلاب فإن :

$$د''(م) = ٠ ، د''(ن) < ٠$$

إذا كانت د'' (س) > ٠ فى منطقة ما فإن المنحنى يكون محدباً لأعلى فى هذه المنطقة
و إذا كانت د'' (س) < ٠ فى منطقة ما فإن المنحنى يكون محدباً لأسفل فى هذه المنطقة



بحث تحدب منحنى دالة

(١) نوجد د'' (س)

(٢) نعين النقط التى تجعل د'' (س) = ٠

(٣) نبحث إشارة د'' (س) قبل و بعد كل نقطة من النقط السابقة فتكون :

المناطق الموجبة يكون فيها المنحنى محدب لأسفل ، المناطق السالبة يكون فيها المنحنى محدب لأعلى

بحث نقط الانقلاب لدالة

(١) نوجد د'' (س)

(٢) نعين النقط التى تجعل د'' (س) = ٠

(٣) نبحث إشارة د'' (س) قبل و بعد كل نقطة من النقط السابقة فإذا كانت :

د'' (س) تتغير إشارتها عند أى نقطة فإن هذه النقطة تكون نقطة إنقلاب

د'' (س) لا تتغير إشارتها عند أى نقطة فإن هذه النقطة لا تكون نقطة إنقلاب

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

رسم منحنيات الدوال

خطوات رسم منحنيات الدوال كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة فأقل

رسم الشكل العام للمنحنى هو توضيح لمعامله الرئيسية وهى :
مناطق التزايد و التناقص – القيم العظمى و الصغرى المحلية
– مناطق التحذب إلى أعلى و مناطق التحذب إلى أسفل
– نقط الانقلاب – نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات

(١) نوجد $d'(s)$ ، $d''(s)$

(٢) نستخدم $d'(s)$ فى تعيين :

١ – مناطق التزايد و التناقص بحل المتباينتين : $d'(s) < 0$ ، $d'(s) > 0$
ب – نقط القيم العظمى و الصغرى المحلية " إن وجدت " حيث $d'(s) = 0$
و قيم الدالة عندها

(٣) نستخدم $d''(s)$ فى تعيين :

١ – مناطق التحذب إلى أعلى و مناطق التحذب إلى أسفل
بحل المتباينتين : $d''(s) < 0$ ، $d''(s) > 0$
ب – نقط الانقلاب " إن وجدت " حيث $d''(s) = 0$ و قيم الدالة عندها

(٤) نعين بعض النقط المساعدة على الرسم مثل :

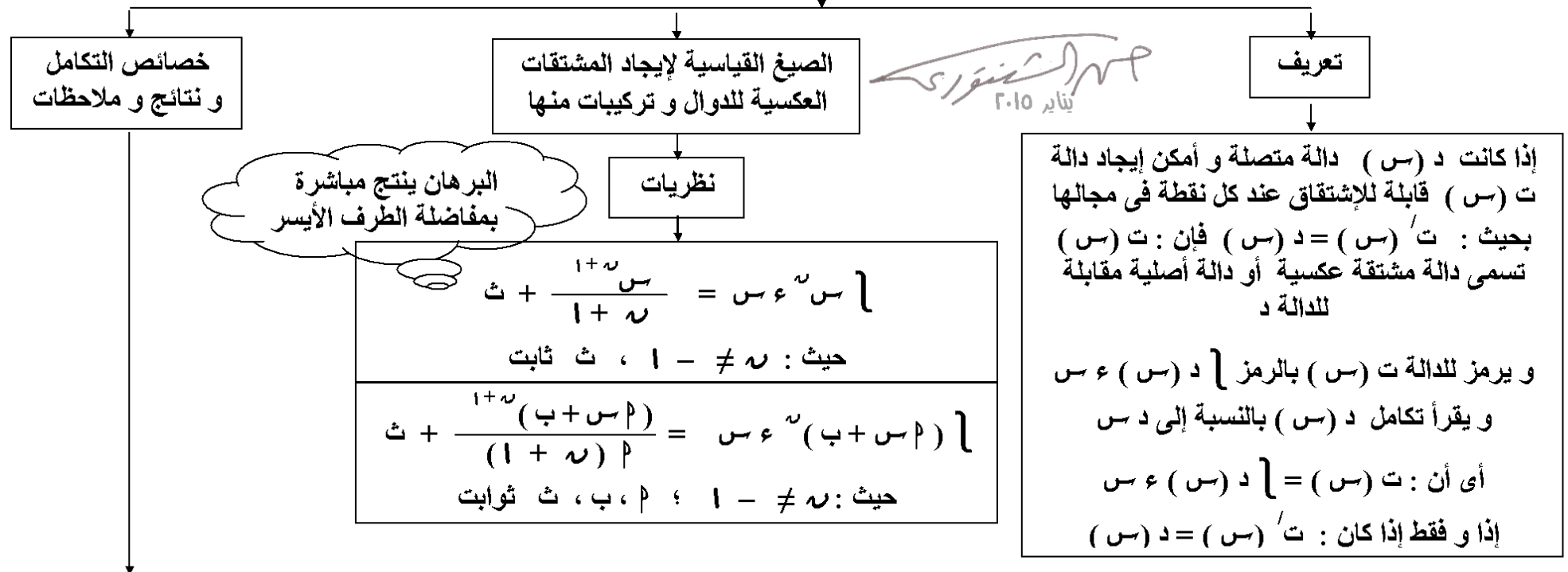
١ – نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات بحل المعادلة $d(s) = 0$
" إن أمكن " و نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع $s = 0$
أى $(0, d(0))$

ب – بعض النقط الأخرى بالتعويض عن s بأى قيمة و إيجاد $d(s)$

(٥) ترتيب النقط السابقة فى جدول و تمثيلها بيانياً و توصيلها

أحمد الشنتورى
يناير ٢٠١٥

التكامل



$\left[\int \text{ع س} + \int \text{ع س} \pm \int \text{ع س} \pm \dots \pm \int \text{ع س} \right] = \int \left[\text{ع س} \pm \dots \pm \text{ع س} \pm \text{ع س} \right]$		
$\left[\int \text{ع س} = \text{س} + \text{ث} \right]$	$\left[\int \text{ع س} = \text{س} + \text{ث} \right]$	$\left[\int \text{ع س} = \text{س} + \text{ث} \right]$
$\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$	$\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$	$\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$
إذا كان : $\frac{\text{ع س}}{\nu} = \text{ع س}$ فإن : $\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$ فإن : $\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$	إذا كان : $\frac{\text{ع س}}{\nu} = \text{ع س}$ فإن : $\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$ فإن : $\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$	إذا كان : $\frac{\text{ع س}}{\nu} = \text{ع س}$ فإن : $\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$ فإن : $\left[\int \text{ع س} = \frac{\text{ع س}}{\nu} \right]$
يتم إجراء عمليات الضرب و القسمة للدوال قبل إجراء التكامل لأنه لا توجد قاعدة عامة لإيجاد تكامل حاصل ضرب دالتين أو خارج قسمتهما	إذا أعطيت معلومات لإيجاد الثابت فيجب أن تستخدم لإيجاد قيمة الثابت ثم يكتب الناتج النهائى للتكامل	يكفى إضافة ثابت واحد لمجموع المشتقات العكسية

تابع : التكامل

تطبيقات هندسية على التكامل

إذا كانت : $v = d(s)$ هي معادلة منحنى فإن :
ميل المماس له عند أى نقطة (s, v) تقع عليه هو :
 $v' = d'(s)$ و بالتالى تكون معادلته هي :
 $d(s) = [d'(s) \cdot s] + c$

ملاحظات

من هذا التكامل نحصل على معادلة عائلة من المنحنيات التى لها نفس ميل المماس عند أى نقطة معينة للإحداثى السينى s و تحديد أحد هذه المنحنيات يتطلب إعطاء شرط إضافى كأن يمر المنحنى بنقطة معينة أو يقطع جزءاً معيناً من أحد المحورين أو الخ

تذكر العلاقات التالية

$$ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma$$

$$ق\alpha\beta = ق\alpha\gamma - ح\beta\gamma$$

$$ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma$$

$$ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma - ح\beta\gamma$$

$$ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma$$

$$ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma - ح\beta\gamma$$

$$ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma$$

تكامل بعض الدوال المثلثية

$$[ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma - ح\beta\gamma]$$

$$[ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma]$$

$$[ق\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma]$$

$$[ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma]$$

$$- \frac{1}{p} ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma$$

$$[ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma]$$

$$\frac{1}{p} ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma$$

$$[ق\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma]$$

$$\frac{1}{p} ح\alpha\beta = ح\alpha\gamma + ح\beta\gamma$$

