

٤

الوحدة الرابعة

التكامل المحدد وتطبيقاته

إعداد

٢ / أ / أشرف حسن عبده

٨٠٨٤ ٧٢٧ ١٢٢٠

التكامل المحدد وتطبيقاته

أبرز نواتج التكامل

$$① \text{ تفاضلي } ص = د = د(ص) = د(ص)$$

$$② \text{ تفاضلي } ص = د(ص)$$

$$③ \text{ } \{ ص \cdot د = د(ص) + \frac{د(د)}{د} \} \quad د \neq 1$$

$$④ \text{ } \{ (د + ب) \cdot د = د(د + ب) + \frac{د(د + ب)}{د} \} \quad د \neq 1$$

$$⑤ \text{ } \{ د(د) = د(د) - د(د) \}$$

$$⑥ \text{ } \{ د(د) = د(د) + د(د) \}$$

$$⑦ \text{ } \{ د(د) = د(د) + د(د) \}$$

$$⑧ \text{ } \{ د(د) = د(د) + \frac{د(د)}{د} \}$$

$$⑨ \text{ } \{ د(د) = د(د) + \frac{د(د)}{د} \} \quad ⑩ \text{ } \{ د(د) = د(د) + \frac{د(د)}{د} \}$$

اوجد تفاضلى كل من :

١ ص = مس^٤ الحل

د ص = ع مس^٣ . د س

٢ ص = (٢س + ٣)^٧ الحل

د ص = ٧ (٢س + ٣)^٦ × (٢) . د س

= ١٤ (٢س + ٣)^٦ . د س

٣ ص = مس^٢ - ٣ الحل

د ص = ٢ مس^٢ - ٣ . د س

٤ س + ص = ٩ الحل

س س د س + ٢ ص د ص = (٢) . د س

د ص = $\frac{-س}{ص}$. د س

٥ ص = ع . ل صيب ع ه ل دالة منى س

د ه = (ع ل + ع ل) د س

= ع ل د س + ع ل د س

د ه = ع د ل + ل د ع

ملاحظة ص . د س

= $\frac{د ص}{د س}$. د س = د ص

اشتره لى بغيره

التكامل بالتعويض

أوجد

١

$$\int \sin^2 (3x - 5) \, dx$$

الحل

$$u = 3x - 5$$

$$du = 3 \, dx$$

$$\int \sin^2 u \, du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{4} \sin(2u) + C$$

$$= \frac{1}{2} (3x - 5) - \frac{1}{4} \sin(2(3x - 5)) + C$$

$$= \frac{3x}{2} - \frac{5}{2} - \frac{1}{4} \sin(6x - 10) + C$$

$$= \frac{3x}{2} - \frac{5}{2} - \frac{1}{4} \sin(6x - 10) + C$$

يحبنا اختيار تعويض مناسب

(٢)

$$\left[\frac{\text{س}^2}{(\text{س}^3 - 4)} \right] \cdot \text{و س} \quad \text{الحل}$$

$$\text{ع} = \text{س}^3 - 4$$

$$\text{و ع} = \text{س}^3 \cdot \text{و س}$$

$$\text{تعويض} = \left[\frac{1}{3} \right] \frac{\text{س}^3}{(\text{س}^3 - 4)} \cdot \text{و س}$$

$$= \left[\frac{1}{3} \right] \frac{1}{\text{ع}} \cdot \text{و ع}$$

$$= \left[\frac{1}{3} \right] \text{ع} \cdot \text{و ع}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{\text{ع}^2}{\text{ع} - 4} + \text{ت}$$

$$= \frac{-(\text{س}^2 - 4)}{12} + \text{ت}$$

$$= \frac{1 - (\text{س}^3 - 4)}{12} + \text{ت}$$

$$[(s+5) \sqrt{s-1}]$$

الحاصل

ع = امد - ١

$$\text{ع} = \text{س} - 1 \quad \text{س} = \text{ع} + 1$$

ع ۲ ج ۵ = ۵ ج ۲

تعويض $\{ (س + ٥) / س - ١ \}$ يس

$$E_2 - E_1 = (1 + \epsilon) \cdot E_1 =$$

$$\{ \epsilon_s, \epsilon_r (1 + \epsilon_r + \epsilon^2) \} =$$

$$E_s = \{E_{1s} + E_{2s} + E_{3s}\} =$$

$$\ddot{u} + \frac{2u}{r} \dot{r} + \frac{\ddot{r}}{r} u + \frac{\dot{r}^2}{r} = 0$$

$$T + {}^3(1-s)4 + {}^5(1-s)\frac{4}{5} + {}^7(1-s)\frac{2}{7} =$$

يَكْتَفَى بِالْتَعْوِيفِ وَلَا يَشْتَرِطُ التَّبَسُّطُ

$$\textcircled{4} \quad \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س}$$

الحل

$$\begin{aligned} \text{ع} &= \text{ه} \text{س} \\ \text{ع} &= \text{س} \text{ه} \text{س} \end{aligned}$$

تعويض

$$\left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} = \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} = \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} + \text{ت}$$

$$\textcircled{5} \quad \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س}$$

الحل

$$\text{ع} = \text{س} \text{ه} \text{س} \quad \text{س} = \text{ه} \text{س}$$

$$\text{س} = \text{ه} \text{س} \quad \text{ع} = \text{س} \text{ه} \text{س}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} = \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} \times \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} = \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} \times \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} = \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} \times \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} = \left[\begin{array}{c} \text{س} \\ \text{س} \end{array} \right] \text{س} \text{ه} \text{س} \times \frac{\text{ع}}{\text{س}}$$

اشرف کمالیہ

۱۰۲

① { ۲س (۵-۴) ۵س }

۲) $3s(s+7) + 5$

۱. سن (لوس) ۱ دس

۳) $\left[\frac{\text{س} + \text{ع}}{\text{س} + \text{ا} + \text{س}} \right]$ ۵ س

11) { س ص ش سس }

$$(4) \left[\frac{s^2}{s^2 - 4} \right] \text{ سے } s$$

١٢) الوه س دس

5) $\frac{17-3}{2}$ سے 2 سے

۱۳۱

6. (3-س) 6-س-س

۱۴

$$\left. \begin{array}{r} 5 \text{ س} \\ 3 \text{ س} - 1 \end{array} \right\} \textcircled{7}$$

١٥) سن^٥ (سن^٤ + ٣) و سن^٤

⑦ $\frac{\sqrt{100}}{100}$ س

التكامل بالتجزئ

إذا كان ص ع دالتين في المتغير س،
وقابلتين للإشتقاق فإن:

$$[ص ع = ص ع - ع] د ص$$

وتسمى قاعدة التكامل بالتجزئ

ملاحظة: وتستخدم هذه القاعدة للتحاد
تكامل حاصل ضرب دالتين ليست أحدهما مشتقة للأخرى

مثال: $[س د = س ع - ع د]$
الحل

$$\begin{aligned} & \text{تفاضل} \quad \downarrow \quad \downarrow \\ & \text{ص} = س \quad \text{د} = ع \\ & \text{ص} = س \quad \text{د} = ع \end{aligned}$$

أشرف حسن عبده

$$\begin{aligned} & = س د - ع د \\ & = س د - ع د + ث \\ & = س [د - ع] + ث \end{aligned}$$

مثال: [لو س ع س]
الحل

$$\begin{array}{l} \text{ص} = \text{لو س} \\ \text{ع} = \text{س} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ع} = \text{س} \\ \text{س} = \text{ع} \end{array}$$

$$= \text{س لو س} - \left[\text{س} \cdot \frac{1}{\text{ص}} \cdot \text{س} \right]$$

$$= \text{س لو س} - \left[\text{س} \cdot 1 \cdot \text{س} \right]$$

$$= \text{س لو س} - \text{س} + \text{ث}$$

$$= \text{س} \left[\text{لو س} - 1 \right] + \text{ث} \quad \text{يعلن انبأ رها فالمره؟}$$

تمويه بطاب [س لو س ع س]

مثال: [لو (س + 1) ع س]
الحل

$$\begin{array}{l} \text{ص} = \text{لو (س + 1)} \\ \text{ع} = \text{س} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{ع} = \text{س} \\ \text{س} = \text{ع} \end{array}$$

$$= \text{س لو (س + 1)} - \left[\text{س} \cdot \frac{\text{س}}{1 + \text{س}} \cdot \text{س} \right]$$

$$= \text{س لو (س + 1)} - \text{س} + \text{ث} + \text{س} \cdot \frac{1}{1 + \text{س}} \cdot \text{س}$$

$$= \text{س} \left[\text{لو (س + 1)} - 1 \right] + \text{ث} + \text{س} \cdot \frac{1}{1 + \text{س}} \cdot \text{س}$$

$$\overline{س} = \frac{س}{س}$$

سؤال: [لو (س ÷ س) دس]
الحل

$$\begin{aligned} ص &= لو س \\ ع &= دس \\ ع &= س \end{aligned}$$

$$= س لو س - \left\{ \frac{س}{س} دس \right.$$

$$= س لو س - \left\{ \frac{1}{1} دس \right.$$

$$= س لو س - \frac{1}{1} س + ث$$

$$= س (لو س - \frac{1}{1}) + ث$$

سؤال: [٣س + ٥ دس]
الحل

$$\begin{aligned} ص &= ٣س + ٥ \\ ع &= دس \\ ع &= \frac{٣س + ٥}{٣} \end{aligned}$$

$$= (٣س + ٥) \left(\frac{٣س}{٣} + \frac{٥}{٣} \right)$$

$$= (٣س + ٥) \left(\frac{٣س}{٣} + \frac{٥}{٣} \right) + ث$$

لا يشترط تبسيط المقدار ويكتفى بإيجاد
الناتج الأخر فقط

مثال (لوس : اس) رس

الحل

$$\left[\frac{\text{لوس}}{\text{اس}} \right] \text{رس}$$

$$\frac{1}{\text{اس}} = \text{ع} = \text{رس}$$

$$\text{ص} = \text{لوس}$$

$$\text{ص} = \frac{1}{\text{اس}} \text{رس} \rightarrow \text{ع} = \frac{1}{\text{اس}} \text{رس}$$

$$= \frac{1}{\text{اس}} \text{لوس} - \left[\frac{1}{\text{اس}} \text{رس} \right] \text{رس}$$

$$= \frac{1}{\text{اس}} \text{لوس} - \frac{1}{\text{اس}} \text{رس} + \text{ت}$$

$$= \frac{1}{\text{اس}} [\text{لوس} - \text{رس}] + \text{ت}$$

لا حظ الفرق بين المثال السابق وهذا

المثال (لوس : اس) رس



تمارين على التكامل بالتجزئ

أوليد

$$1 \quad \left[\frac{s^2}{s^2} \right] \text{ دس} \quad 9 \quad \left[\frac{s^3}{s^2} \right] \text{ دس}$$

$$2 \quad \left[\frac{s^3}{s^2} \right] \text{ دس} \quad 10 \quad \left[\frac{s^4}{s^2} \right] \text{ دس}$$

$$3 \quad \left[\frac{s^2}{(s+1)^2} \right] \text{ دس} \quad 11 \quad \left[\frac{s^2}{(s+1)^2} \right] \text{ دس}$$

$$4 \quad \left[\frac{s^4}{s^2+1} \right] \text{ دس} \quad 12 \quad \left[\frac{s^2}{s^2+1} \right] \text{ دس}$$

$$5 \quad \left[\frac{s^2+s+3}{s^2} \right] \text{ دس} \quad 13 \quad \left[\frac{s^2}{(s+1)^2} \right] \text{ دس}$$

$$6 \quad \left[\frac{s^2}{s^2+3} \right] \text{ دس} \quad 14 \quad \left[\frac{s^2}{(s+1)^2} \right] \text{ دس}$$

$$7 \quad \left[\frac{s^2}{s^2+3} \right] \text{ دس} \quad 15 \quad \text{إذا كان } \left[\frac{s^2}{(s+1)^2} \right] \text{ دس}$$

$$= \text{صع} - \left[\frac{s^2}{s^2+3} \right] \text{ دس} \quad \text{صع} = \dots$$

$$1 \quad \left[\frac{s^2}{s^2} \right] \text{ دس} \quad \text{اشرف حسن عبده}$$

بعض تطبيقات التكامل الغير محدد

معادلة المخنى = ميل المحاس $\frac{1}{s}$

١ اوجد معادلة المخنى المار بالنقطة (١٦٠) والذي ميل المحاس له عند أى نقطة (س، ص) واقعة عليه يساوى $\frac{s}{s+1}$

٢ اذا كان ميل المحاس لمخنى الدالة د عند أى نقطة (س، ص) واقعة عليه يعطى بالعلاقة $r(s) = \frac{s}{s+1}$ فأوجد معادلة المخنى المار بالنقطة (١٦٠، ٢٠)

٣ اوجد معادلة المخنى الذى يمر بالنقطة ٢ (٣، ٢) وميل العمودى عليه عند أى نقطة (س، ص) هو $3-s$

٤ اوجد معادلة المخنى $ص = د(س)$ اذا كان $\frac{دص}{ص} = ٢س + ١$ حين ٢، ١ ثوابت و للمخنى نقطة انقلاب عند النقطة (٢٦٠) وقيمة صفرى محلية عند النقطة (٠، ١٠)

٥ اذا كان ميل المحاس لمخنى عند نقطة (س، ص) واقعة عليه هو $\frac{s}{s+1}$ فأوجد معادلة المخنى الذى يمر بالنقطة (٠، $\frac{11}{15}$)

اشرف حسن عبده

تكال الدوال المطلية

جدول تكاملات الدوال المطلية

تذكر

جاس وس	- جتاس + ث	جاس + جتاس = ا
جتاس وس	حاس + ث	ا + طاس = قاس
قاس وس	ظاس + ث	ا + طتاس = قتاس
قتاس وس	- ظتاس + ث	من ^ن وس = $\frac{س^{1+ن}}{1+ن} + ث$
قاس ظاس وس	قاس + ث	
قتاس ظاس وس	- قتاس + ث	

$$\{ (م + ب) س^{ن+1} - \frac{(م + ب) س^{ن+1}}{1+ن} + ث \}$$

$$\{ جا (م + ب) س = - \frac{جتا (م + ب) س}{م} + ث \}$$

اشرفه حذره

ملاحظة: $\{ \text{قاس طاس} \cdot \text{س} = \frac{1}{\text{م}} \text{فاس} + \text{ث} \}$

او بعد $\{ (\text{حاس} + \text{حتاس} + \text{قاس}) \cdot \text{س} \}$

الحل $- \text{حتاس} + \text{حاس} + \text{طاس} + \text{ث}$

$\{ \text{قاس} (\text{حتاس} + \text{طاس}) \cdot \text{س} \}$

الحل $\{ \text{قاس} \times \text{جتاس} + \text{قاس طاس} \cdot \text{س} \}$

$\{ \text{جتاس} + \text{قاس طاس} \cdot \text{س} \}$

$= \text{جاس} + \text{قاس} + \text{ث}$

الشرط الكافي

$\{ \frac{\text{جتاس}}{\text{حاس} - 1} \cdot \text{س} \}$

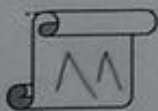
الحل $\{ \frac{1 - \text{حاس}}{1 - \text{حاس}} \cdot \text{س} \}$

$\{ \frac{(1 - \text{حاس})(1 + \text{حاس})}{1 - \text{حاس}} \cdot \text{س} = 1 - \text{حاس} \cdot \text{س} \}$

$= \text{س} + \text{جتاس} + \text{ث}$

لذا للطالب * $\{ \text{قاس} (\text{جتاس} - \text{قاس}) \cdot \text{س} \}$

* $\{ \frac{\text{جتاس}}{1 - \text{جتاس}} \cdot \text{س} \}$



ملاحظة هامة: * جاس = جاس حثاس
 * حثاس = حثاس - جاس = جاس - ١ = ٢ - جاس

سؤال: اذا كان ميل المماس للمحنى عند أي نقطة عليه (س، ص)
 يعطى بالعلاقة $\frac{ص}{س} = \text{جاس حثاس}$ فأوجد معادلة المنحنى
 معلماً بأنه يمر بالنقطة $(16, \frac{\pi}{4})$

الحل

معادلة المنحنى = [ميل المماس] $\frac{ص}{س}$

$$\frac{ص}{س} = \frac{1}{4} \text{ جاس حثاس} \quad \text{ص}$$

$$\frac{ص}{س} = \frac{1}{4} \text{ جاس حثاس} \quad \text{ص}$$

الشرط المذكور

$$\frac{ص}{س} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \text{ جاس حثاس} + \frac{1}{4}$$

المنحنى يمر بالنقطة $(16, \frac{\pi}{4})$ فهي تحقق معادلته

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4} \text{ حثاس} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{9}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\text{معادلة المنحنى} \quad \frac{ص}{س} = \frac{1}{4} \text{ حثاس} + \frac{9}{8}$$

تمريل: اوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(16, \frac{\pi}{4})$ وميل المماس
 له عند أي نقطة واقعة عليه (س، ص) هو:

$$\frac{ص}{س} = \frac{\pi}{4} \text{ حثاس} - \frac{\pi}{4} \text{ جاس حثاس}$$

تمارين واجب

أوجد ① } حاس . دس ② } قأ (س-٣) دس

③ } قأ (٢-س) دس ④ } قاهس طاهس دس

⑤ } [١ + طأ (٣س-٤)] دس ⑥ } حتأس جاس دس

⑦ } (١ + طأس) حأس دس ⑧ } طاس حاس دس

⑨ } (٣ + حاس) حاس دس ⑩ } قأس طاس دس

⑪ } (حتاس + حتأس) دس ⑫ } (حتاس + قاس) دس

⑬ } س حتا (س + ٥) دس

⑭ إذا كان $\frac{ص}{دس} = ٧ - جاس$ أوجد ص بدلالة س إذا كان ص = ٥ ، س = ٠

⑮ اوجد معادلة المنحنى الذي يمر بالنقطة $(\frac{\pi}{3}, ٩ + \frac{\pi}{4})$ إذا كان ميل المماس له هو $٣ = ٢س + \frac{١}{٣} قأس$

⑯ منحنى ميل المماس له يساوي $٢ - قأس$ ميل ٢ ثابت فإذا كان المنحنى يمر بالنقطتين $(\frac{\pi}{4}, ٥)$ ، $(\frac{٣\pi}{4}, ١)$ فأوجد معادلة المنحنى

١١ اوجد $\int_2^4 (3x^2 - 2) \cdot dx$

الحل

$$\left[(3x^2 - 2) \cdot x - (4) \cdot (3) - (2) \cdot (3) \right]_2^4 = \left[3x^3 - 2x \right]_2^4$$

$$70 =$$

١٢ اوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\pi}{4} - x \right] \cdot dx$

$$\left[\left(\frac{\pi}{4} - x \right) \cdot \frac{x^2}{2} - \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

١٣ اذا كانت دالة متصلة على $[0, 6]$ ، $\int_0^6 f(x) \cdot dx = 14$ ، $\int_0^6 f(x) \cdot dx = 7$ اوجد $\int_0^6 f(x) \cdot dx$

$$\int_0^6 f(x) \cdot dx = \int_0^6 f(x) \cdot dx + \int_0^6 f(x) \cdot dx$$

$$70 = 14 + 7 =$$

١٤ اوجد $\int_{-4}^2 (x+1) \cdot dx$

الحل من تعريف دالة المقياس $\int_{-4}^2 (x+1) \cdot dx = \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-4}^2$

الوالة متصلة عند $x = -1$

تكون جدول الرسم البياني لتحديد حدود العظام

$$\int_{-4}^2 (x+1) \cdot dx = \int_{-4}^{-1} (x+1) \cdot dx + \int_{-1}^2 (x+1) \cdot dx$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-4}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^2 =$$

$$9 =$$

أوجد $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

لوجد ايضا الدالة $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

من حدود النطاق $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{16}{3} \text{ و صورة مسما حة}$$

حل آخر

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{16}{3} \text{ و صورة مسما حة}$$

الحل الاول انعم واشمل بوضوح

تجارب الطلاب في الحصة

أولاً

$$\textcircled{1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (2s+3) \text{ دس} \quad \textcircled{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (s-s^2) \text{ دس}$$

$$\textcircled{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (s-3) \text{ دس} \quad \textcircled{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (s+s^2+3) \text{ دس}$$

$$\textcircled{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (s+s^2+3) \text{ دس} \quad \textcircled{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (2s-7) \text{ دس}$$

ملحوظة ١: إذا كانت الدالة د متصلة و فردية على الفترة $[P, P-]$ فإن:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس} = \text{صفر}$$

ملحوظة ٢: إذا كانت الدالة د متصلة و زوجية على الفترة $[P, P-]$ فإن:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ P \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس}$$

مثال: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} (s-1) \text{ دس}$

الحل: $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} (د(س)) \text{ دس}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} (s-1) \text{ دس} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \left[\frac{s-1}{3} \right] \text{ دس} = 1$$

سؤال ٤: إذا كان د دالة فردية متصلة في $[-3, 3]$ ،

$$\int_{-3}^3 (د(س)) د(س) = 9 \text{ فما قيمة } \int_{-3}^3 (د(س)) د(س) د(س)$$

الحل

- الدالة فردية $\int_{-3}^3 (د(س)) د(س) د(س) = 0$

$$\int_{-3}^3 (د(س)) د(س) د(س) = \int_{-3}^3 (د(س)) د(س) د(س) + \int_{-3}^3 (د(س)) د(س) د(س)$$

$$0 = 9 + \int_{-3}^3 (د(س)) د(س) د(س)$$

$$\int_{-3}^3 (د(س)) د(س) د(س) = -9$$

إذا كانت د فردية فإن $\int_{-3}^3 (د(س)) د(س) د(س) = -9$

سؤال ٥: إذا كانت د دالة زوجية متصلة على $[-4, 4]$ ،

$$\int_{-4}^4 (د(س)) د(س) = 20 \text{ ، } \int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) = 7 \text{ فما قيمة } \int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س)$$

الحل

- الدالة زوجية $\int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س) = 2 \int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س)$

$$20 = 2 \int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س)$$

$$\int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س) = 10$$

$$\int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س) = \int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س) + \int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س)$$

$$10 = 7 + \int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س)$$

$$3 = \int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س)$$

إذا كان د زوجية فإن $\int_{-4}^4 (د(س)) د(س) د(س) د(س) = 3$