

الاحتمال

*التجربة العشوائية

تعريف التجربة العشوائية

التجربة العشوائية هي كل تجربة نستطيع أن نحدد مقدماً (أي قبل إجرائها) جميع النواتج الممكنة الحدوث، ولكن لا يمكن تحديد أي من هذه النواتج سيتحقق فعلاً عند إجراء هذه التجربة

تعريف : فضاء (فراغ) العينة أو فضاء النواتج (ف)

هو مجموعة جميع النواتج الممكنة الحدوث لتجربة عشوائية.

تعريف الحدث : هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة.

*أنواع الأحداث

(١) **الحدث المؤكد:** هو الحدث الذي لا بد أن يقع ويرمز له بالرمز (ف).

(٢) **الحدث المستحيل:** هو الحدث الذي لا يمكن أن يقع ويرمز له بالرمز (\emptyset) .

(٣) **الحدث الأولي (البسيط):** هو الحدث الذي تتألف المجموعه التي تمثله من عنصر واحد من عناصر فضاء العينة.

(٤) الحدثان المتنافيان :

هما الحدثان اللذان يستحال وقوعهما معاً و وقوع أحدهما يمنع وقوع الآخر .

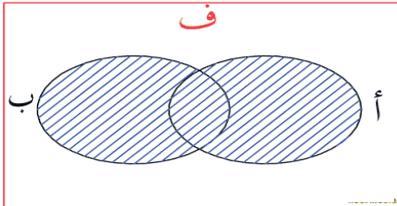
تعريف

(١) إذا كان M ، B حدثين جزئيين من F فإن M ، B حدثان متنافيان إذا كان $M \cap B = \emptyset$.

(٢) يقال لعدة أحداث أنها متنافية إذا وإذا فقط كانت متنافية متتالي متتالي.

ملحوظة

يقال أن حدث ما قد وقع إذا كان ناتج التجربة العشوائية عنصراً من عناصر المجموعة التي تعبر عن هذا الحدث .

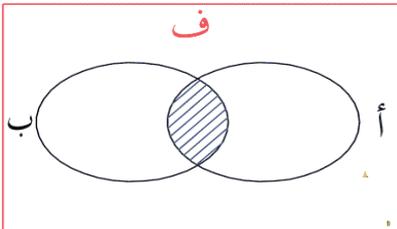


* العمليات على الأحداث

(١) الاتحاد ($U = \cup$) أو

في الشكل المقابل: الجزء المظلل يمثل $M \cup B$

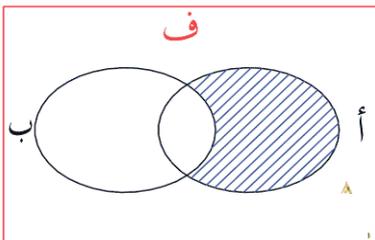
$M \cup B$ يعني وقوع أحد الحدثين على الأقل.



(٢) التقاطع ($\cap = \cap$) و

في الشكل المقابل: الجزء المظلل يمثل $M \cap B$

$M \cap B$ يعني وقوع الحدثين معاً.



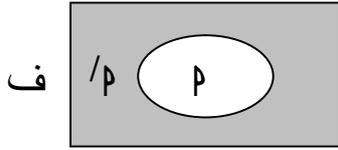
(٣) الفرق (-) في الشكل المقابل:

الجزء المظلل يمثل $M - B$ - يعني وقوع الحدث M فقط

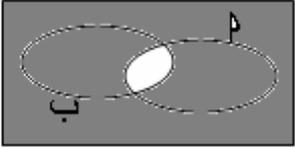
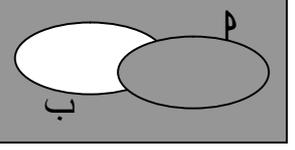
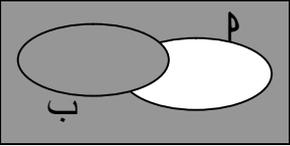
، وكذلك يعني وقوع الحدث M وعدم وقوع الحدث B .

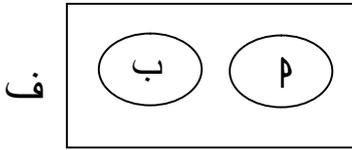
(٤) الحدث المكمل

في الشكل المقابل : الجزء المظلل يمثل المجموعه P ويسمى بالحدث المكمل للحدث P ، وكذلك
يعنى عدم وقوع الحدث
 $\therefore P - F = P'$



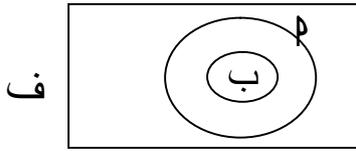
شكل فن (تمثيل الحدث)	الحدث	التعبير عن الحدث
	P $P - F = P'$	وقوع الحدث P عدم وقوع الحدث P
	$P \cup B$	وقوع P أو B وقوع أحدهما على الأقل
	$P \cap B$	وقوع P و B وقوع كلاهما وقوعهما معا
	$P - B = P \cap B'$ $(P \cap B) - B =$	وقوع P فقط
	$B - P = P' \cap B$ $(B \cap P) - P =$	وقوع B فقط وقوع B وعدم وقوع P
	$(P - B) \cup (B - P)$ $(P \cup B) - (P \cap B) =$	وقوع أحدهما فقط وقوع P فقط أو وقوع B فقط
	$(P \cup B)' = P' \cap B'$	عدم وقوع أى منهما عدم وقوع P وعدم وقوع B

ف		$'B \cup P = '(B \cap P)$	عدم وقوع الحدثين معاً وقوع أحدهما على الأكثر
ف		$'(P - B) = 'B \cup P$	وقوع P أو عدم وقوع B عدم وقوع B فقط
ف		$'(B - P) = 'P \cup B$	وقوع B أو عدم وقوع P عدم وقوع P فقط



تذكر أن :

(١) إذا كان P ، B متنافيان فإن $B \cap P = \emptyset$
 $B - P = B$ ، $P - B = P$



(٢) إذا كان $B \supset P$ فإن :

$B \cap P = B$ ، $B \cup P = P$ ، $P - B = \emptyset$

(٣) قانون دي مورجان $'(B \cap P) = 'B \cup 'P$ ، $'(B \cup P) = '(B \cap P)$

مثال (١)

في تجربة القاء قطعتي عملة متمايزتين مرة واحدة وملاحظة الوجهين الظاهرين .
 اكتب فضاء العينة لهذه التجربة وعين الأحداث الآتية:

م = ظهور كتابة واحدة على الأقل .
 ب = ظهور كتابة واحدة على الأكثر .
 ج = ظهور صورته واحدة بالضبط .
 د = ظهور صورتين على الأكثر .
 هـ = عدم ظهور كتابات .
 و = ظهور صورتين على الأقل .

الحل :

ف = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) }

م = { (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك) }

ب = { (ص، ك)، (ك، ص)، (ص، ص) }

ج = { (ص، ك)، (ك، ص) }

د = ف

هـ = { (ص، ص) }

و = { (ص، ص) }

مثال ٢: في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين وملاحظة الوجه العلوي، عين الأحداث الآتية:

$$P = \text{مجموع الوجهين العلويين أكبر من ١١}$$

$$B = \text{مجموع الوجهين العلويين أقل من ٥}$$

$$C = \text{مجموع الوجهين العلويين يقبل القسمة على ٤}$$

$$D = \text{الفرق المطلق بين الوجهين العلويين ٣}$$

$$H = \text{الحصول على عدد أولى في أحد الرميّتين على الأقل.}$$

$$W = \text{الحصول على عدد أولى مرة واحدة فقط.}$$

الحل

النتيجة						
٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)
٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
	١	٢	٣	٤	٥	٦
						الرمية الأولى

$$F = \{(س،ص)\} = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ص\}$$

$$\{(٦،٦)\} = P$$

$$B = \{(١،١)، (١،٢)، (١،٣)، (٢،١)، (٢،٢)\}$$

$$C = \{(١،٣)، (٢،٢)، (٦،٢)، (٣،١)، (٣،٥)، (٤،٤)، (٥،٣)، (٢،٦)\}$$

$$D = \{(١،٤)، (٢،٥)، (٣،٦)، (٤،١)، (٥،٢)، (٦،٣)\}$$

$$H = \{(١،١)، (٢،٢)، (٢،٣)، (٢،٤)، (٢،٥)، (٢،٦)، (٣،١)، (٣،٢)، (٣،٣)\}$$

$$W = \{(١،٢)، (١،٣)، (١،٥)، (١،٦)، (٢،١)، (٢،٣)، (٢،٤)، (٢،٥)، (٢،٦)، (٣،١)، (٣،٢)، (٣،٤)، (٣،٥)، (٤،١)، (٤،٢)، (٤،٣)، (٤،٤)، (٤،٥)، (٤،٦)، (٥،١)، (٥،٢)، (٥،٣)، (٥،٤)، (٥،٥)، (٥،٦)، (٦،١)، (٦،٢)، (٦،٣)، (٦،٤)، (٦،٥)، (٦،٦)\}$$

$$W = \{(١،٢)، (١،٣)، (١،٥)، (١،٦)، (٢،١)، (٢،٣)، (٢،٤)، (٢،٥)، (٢،٦)، (٣،١)، (٣،٢)، (٣،٤)، (٣،٥)، (٤،١)، (٤،٢)، (٤،٣)، (٤،٤)، (٤،٥)، (٤،٦)، (٥،١)، (٥،٢)، (٥،٣)، (٥،٤)، (٥،٥)، (٥،٦)، (٦،١)، (٦،٢)، (٦،٣)، (٦،٤)، (٦،٥)، (٦،٦)\}$$

$$\{(١،٢)، (١،٣)، (١،٥)، (١،٦)، (٢،١)، (٢،٣)، (٢،٤)، (٢،٥)، (٢،٦)، (٣،١)، (٣،٢)، (٣،٤)، (٣،٥)، (٤،١)، (٤،٢)، (٤،٣)، (٤،٤)، (٤،٥)، (٤،٦)، (٥،١)، (٥،٢)، (٥،٣)، (٥،٤)، (٥،٥)، (٥،٦)، (٦،١)، (٦،٢)، (٦،٣)، (٦،٤)، (٦،٥)، (٦،٦)\}$$

حساب الاحتمال

* مسلمات وقواعد الاحتمال

- (١) لكل حدث $P \supseteq F$ يوجد عدد حقيقي يسمى احتمال الحدث P ويرمز له بالرمز P حيث $0 \leq P \leq 1$ أو $P \in [0, 1]$
- إذا كان $n(P) = m$ ، $n(F) = n$ فإن $P = \frac{m}{n} = \frac{\text{عدد عناصر الحدث } P}{\text{عدد عناصر ف}}$
- (٢) $P = 1$ (أي أن احتمال الحدث المؤكد = ١)
- (٣) $P = 0$ (أي أن احتمال الحدث المستحيل = صفرًا)
- (٤) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (وقوع أحد الحدثين على الأقل)
- (٥) وإذا كان P ، B حدثين متنافيين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

خواص دالة الاحتمال :

(١) إذا كان $F = \{P_1, P_2, P_3, \dots, P_n\}$ حيث $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ أحداث بسيطة متنافية فإن:

$$1 = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$$

وإذا كان $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ متساوية الاحتمال فإن:

$$\frac{1}{n} = P_1 = P_2 = P_3 = \dots = P_n$$

$$(2) P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(3) P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$(4) P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$(5) P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A - B) + P(B - A) = P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$(6) \text{ احتمال وقوع } P \text{ فقط} = P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap B)$$

$$(7) P(A \cap B) = P(A \cup B) - P(A - B) - P(B - A)$$

$$(8) P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A - B) + P(B - A)$$

$$(9) P(A \cup B) = P(A \cap B) + P(A - B) + P(B - A)$$

مثال (٣)

إذا كان P ، B حدثين من فضاء العينة لتجربة عشوائية وكان $L(P) = \frac{1}{6}$ ، $L(B \cap P) = \frac{1}{18}$ ،
 $L(B \cup P) = \frac{4}{9}$ ، أوجد:

$$(1) L(B \cap \bar{P}) \quad (2) L(\bar{B})$$

الحل

$$(1) L(B \cap \bar{P}) = L(B \cup P) - L(P) = \frac{4}{9} - \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

$$(2) L(\bar{B}) = L(B \cup P) - L(B) + L(P) = \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{1}{6} - \frac{1}{18} + \frac{1}{6} = L(B) \quad \therefore \frac{1}{18} - L(B) + \frac{1}{6} = \frac{4}{9}$$

$$\therefore L(\bar{B}) = 1 - L(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

مثال (٤)

إذا كان P ، B حدثين متنافيين من فضاء العينة في تجربة عشوائية، وكان $L(P) = 0.26$ ،
 $L(B) = 0.33$ أوجد:

$$(1) L(B \cup P) \quad (2) L(B \cap P) \quad (3) L(B \cap \bar{P})$$

الحل

\therefore الحدثان متنافيان $\therefore L(B \cap P) = \text{صفر}$

$$L(B \cup P) = 0.33 + 0.26 = 0.59$$

$$(1) L(B \cup P) = 1 - L(B \cap P) = 1 - \text{صفر} = 1$$

$$(2) L(B \cap P) = 0.59 - 1 = -0.41$$

$$(3) L(B \cap \bar{P}) = L(B) - L(B \cap P) = 0.33 - \text{صفر} = 0.33$$

مثال (٥)

إذا كان $L(P) = \frac{1}{3}$ ، $L(\bar{P}) = \frac{1}{3}$ ، $L(B \cap \bar{P}) = \frac{5}{12}$ ،
 أوجد كلاً من: $L(P)$ ، $L(B \cup \bar{P})$

الحل

$$\therefore L(\bar{P}) = 1 - L(P) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \therefore L(B \cap \bar{P}) = \frac{5}{12} = L(B \cup \bar{P}) - L(P) = L(B \cup \bar{P}) - \frac{1}{3}$$

$$L(B \cup \bar{P}) = \frac{5}{12} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = L(B \cap \bar{P}) - L(B) + L(P) = L(B \cup P)$$

مثال (٦)

سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من بين ٤٠ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٤٠ أوجد احتمال أن البطاقة المسحوبة تحمل رقماً فردياً:

أولاً: يقبل القسمة على ٥

ثانياً: يقبل القسمة على ٧

ثالثاً: يقبل القسمة على ٥ أو ٧

الحل

ن (ف) = ٤٠

$$\text{أولاً: } P = \{٥, ١٥, ٢٥, ٣٥\} \quad \therefore P = \frac{٤}{٤٠} = \frac{١}{١٠}$$

$$\text{ثانياً: } P = \{٧, ٢١, ٣٥\} \quad \therefore P = \frac{٣}{٤٠} = \text{ل (ب)}$$

$$\text{ثالثاً: } P \cup B = \{٥, ١٥, ٢٥, ٣٥, ٧, ٢١\} \quad \therefore P \cup B = \frac{٦}{٤٠} = \frac{٣}{٢٠} = \text{ل (ج)}$$

مثال ٧ :

من مجموعة أرقام العدد ٣٢١٠، كون عدداً مكوناً من رقمين مختلفين، وأحسب احتمال أن يكون الحدث عدداً زوجياً أو رقم العشرات فردى.

الحل

$$\text{ف} = \{١٠, ٢٠, ٣٠, ٢١, ٣١, ١٢, ٣٢, ١٣, ٢٣\}$$

$$P = \{١٠, ٢٠, ٣٠, ١٢, ٣٢\} \text{ (العدد الزوجي)}$$

$$B = \{١٠, ٣٠, ٣١, ١٢, ٣٢, ١٣\} \text{ (رقم العشرات فردى)}$$

$$P \cup B = \{١٠, ١٣, ١٢, ٣٢, ٢٠, ٣١\} \quad \therefore P \cup B = \frac{٧}{٩}$$

مثال ٨

ألقى حجر نرد منتظم مرتين متتاليتين ولو حظ العدد على الوجه العلوى فى كل مرة. اوجد احتمال:

(١) أن يكون مجموع العددين أكثر من أو يساوى ١٠

(٢) أن يكون أحد العددين ٤ والمجموع أقل من ٩

(٣) أن يكون مجموع العددين زوجياً.

الحل

$$\text{ف} = \{(١,١), (٢,١), \dots, (٦,٦)\} \quad \text{ن (ف)} = ٣٦$$

$$(١) \text{ نفرض أن } P \text{ هو حدث أن يكون مجموع العددين أكبر من أو يساوي } ١٠ \\ P = \{(٦,٦), (٥,٦), (٦,٥), (٥,٥), (٤,٦), (٦,٤)\} \quad \therefore P = \frac{٦}{٣٦} = \frac{١}{٦}$$

$$(٢) \text{ نفرض أن } B \text{ هو حدث أحد العددين ٤ والمجموع أقل من ٩} \\ B = \{(١,٤), (٢,٤), (٣,٤), (٤,٤), (٤,١), (٤,٢), (٤,٣)\} \quad \therefore B = \frac{٧}{٣٦} = \text{ل (ب)}$$

$$(٣) \text{ نفرض أن } J \text{ هو حدث أن يكون مجموع العددين زوجياً.} \\ \therefore J = \frac{١٨}{٣٦} = \frac{١}{٢} = \text{ل (ج)}$$

مثال ٩ :

حقيقية بها ٣٥ بطاقة مرقمة من ١ إلى ٣٥ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من الحقيقية، احسب احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة:

(١) فردياً. (٢) زوجياً أو يقبل القسمة على ٣

الحل

$$ن (ف) = ٣٥$$

$$P (١) = \frac{18}{35} \quad \text{ل} \therefore P = \frac{18}{35}$$

$$(٢) ب = \{٢, ٤, ٦, ٨, ١٠, ١٢, ١٤, ١٦, ١٨, ٢٠, ٢٢, ٢٤, ٢٦, ٢٨, ٣٠, ٣٢\}$$

$$\therefore ل (ب) = \frac{23}{35}$$

مثال ١٠ :

٣ أشخاص س، ص، ع يتنافسون في سباق، فإذا كان احتمال فوز ص = ضعف احتمال فوز س، و احتمال فوز ع ثلاثة أمثال احتمال فوز س. وأن شخصاً واحداً سيفوز في السباق، اوجد:

(١) احتمال فوز س (٢) احتمال فوز س أو ع (٣) احتمال عدم فوز ع

الحل

نفرض احتمال فوز س = م ، احتمال فوز ص = ٢م ، احتمال فوز ع = ٣م

$$لكن ل (س) + ل (ص) + ل (ع) = ١$$

$$\therefore م + ٢م + ٣م = ١ \quad \therefore م = \frac{1}{6}$$

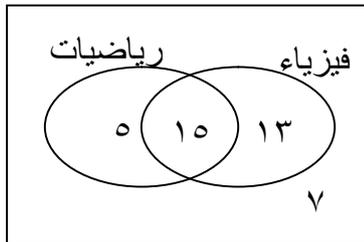
$$\therefore ل (س) = \frac{1}{6}$$

$$ل (س \cup ع) = ل (س) + ل (ع) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$ل (٣) = ل (ع) - ١ = \frac{3}{6} - ١ = -\frac{1}{2}$$

مثال (١١) : فصل دراسي به ٤٠ طالب من بينهم ٢٨ يدرسون الفيزياء و ٢٠ يدرسون الرياضيات ، ١٥ يدرسون المادتين معا . أختير طالب عشوائياً أوجد احتمال :

(أ) يدرس أحد المادتين على الأقل (ب) يدرس الفيزياء فقط (ج) لا يدرس أي من المادتين



$$\text{الحل : ل (أحد المادتين فقط) } = \frac{5+13}{40} = \frac{18}{40} = \frac{9}{20}$$

$$\text{ل (يدرس الفيزياء فقط) } = \frac{13}{40}$$

$$\text{ل (لا يدرس أي من المادتين) } = \frac{7}{40}$$

تمارين (١)

(١) إذا كان P ، ب حدثان في فضاء العينة ف بحيث $L(P) = \frac{1}{5}$ ، $L(B) = \frac{3}{5}$ ،
 $L(P \cap B) = \frac{1}{10}$. احسب $L(P \cup B)$ ، $L(P \cap B)$ ، $L(P \cap B)$ ، $L(P \cup B)$.
 ($\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{5}$ ، $\frac{3}{10}$)

(٢) إذا كان P ، ب حدثان في فضاء العينة ف بحيث $L(P \cup B) = \frac{3}{4}$ ، $L(P \cap B) = \frac{1}{4}$ ،
 $L(P) = \frac{2}{3}$. احسب $L(P)$ ، $L(B)$ ، $L(P \cap B)$.
 ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{2}{3}$ ، $\frac{1}{3}$)

(٣) إذا كان P ، ب حدثان في فضاء العينة ف بحيث $L(P \cup B) = \frac{2}{3}$ ، $L(B) = \frac{1}{2}$ ،
 $L(P) = \frac{1}{3}$. احسب $L(P \cap B)$ ، $L(P \cup B)$ ، $L(P \cap B)$.
 ($\frac{1}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ ، $\frac{1}{3}$)

(٤) إذا كان P ، ب حدثان في فضاء العينة ف بحيث $L(P) = 0.4$ ، $L(B) = 0.3$ ،
 $L(P \cup B) = 0.8$. احسب : أولاً : احتمال وقوع P أو B . (٠.٥)
 ثانياً : احتمال وقوع أحدهما على الأكثر (٠.٨)

(٥) إذا كان P ، ب حدثان في فضاء العينة ف بحيث $L(P) = 0.7$ ، $L(B) = 0.6$ ،
 $L(P - B) = 0.3$. احسب : أولاً : احتمال وقوع P و B . (صفر)
 ثانياً : احتمال وقوع أحد الحدثين فقط (٠.٩)

(٦) إذا كان P ، ب حدثين في فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان احتمال وقوع الحدث $P = 0.7$ ،
 واحتمال عدم وقوع الحدث $B = 0.6$ واحتمال وقوعهما معا $= 0.4$ أوجد :
 أولاً : احتمال وقوع الحدثين معا
 ثانياً : احتمال وقوع أحدهما على الأقل
 ثالثاً : احتمال وقوع أحدهما على الأكثر
 (٠.٤)
 (٠.٧)
 (٠.٦)

(٧) إذا كان P ، ب حدثين في فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان $L(P) = 0.7$ ، $L(B) = 0.8$ ،
 $L(P - B) = 0.1$ أوجد :
 أولاً : احتمال وقوع أحدهما على الأقل
 ثانياً : احتمال وقوع أحدهما فقط
 (٠.٩)
 (٠.٧)

(٨) إذا كان P ، ب حدثين في فضاء النواتج لتجربة عشوائية وكان $L(P) = S$ ، $L(B) = \frac{3}{4}$ ،
 $L(P \cup B) = \frac{2}{3}$ أوجد قيمة S في الحالات الآتية :
 أولاً : P ، ب متنافيان ($\frac{1}{12}$)
 ثانياً : $B \supset P$ ($\frac{1}{3}$)

(٩) تجربة عشوائية فضاء نواتجها $F = \{ \omega_1 ، \omega_2 ، \omega_3 ، \omega_4 \}$ وكانت L دالة احتمال بحيث

ل (و١) = ٠.١ ، ل (و٢) = ، ل (و٤) = أوجد :
 أولاً : ل (و٣) ثانياً : احتمال الحدث $P = \{ و١ ، و٣ \}$
 ثالثاً : احتمال الحدث $B = \{ و١ ، و٢ ، و٤ \}$

(٠.٧ ، ٠.٤ ، ٠.٣)

(١٠) ثلاثة سباحين P ، ب ، ج فى سباق ينتهى بفوز أحدهم فقط وكان P ، ب لهما نفس احتمال الفوز واحتمال فوز P ضعف احتمال فوز ج . أوجد احتمال فوز ب أو ج . (٠.٦)

(١١) ثلاثة خيول س ، ص ، ع فى سباق ينتهى بفوز أحدهم فقط وكان احتمال فوز س ضعف احتمال فوز ص ، واحتمال فوز ص ضعف احتمال فوز ع . أوجد احتمال فوز كل منهم
 ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{2}{7}$ ، $\frac{4}{7}$)

(١٢) فى امتحان الإحصاء كان احتمال أن يحل الطالب (P) مسألة $\frac{3}{5}$ ، احتمال أن يحل الطالب (ب) نفس المسألة $\frac{4}{7}$ ، و احتمال أن يحل الطالبين معاً المسألة $\frac{1}{4}$. أوجد :
 أولاً : احتمال عدم حل المسألة
 ثانياً : احتمال أن يحل الطالب (ب) المسألة فقط
 ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{7}$)

(١٣) ٤ بطاقات مرقمة من ١ إلى ٤ . سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى لتكوين عدد مكون من رقمين . أوجد احتمال :

(١) رقم العشرات زوجى (٢) رقم الآحاد زوجى (٣) مجموع الرقمين عدداً أولياً .
 فى الحالتين : أولاً : مع الإحلال
 ثانياً : دون إحلال
 ($\frac{9}{16}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{4}$)

(١٤) فى أحد المجتمعات كان احتمال إنجاب ولد يساوى احتمال إنجاب بنت وأختيرت أسرة عشوائياً فكان لديها ٣ أطفال . أكتب فضاء نواتج العينة ثم أوجد احتمال :
 (أ) بين الأطفال بنت فقط (ب) الطفل الأكبر ولد
 ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{3}{8}$)

(١٥) فصل دراسى به ٤٠ طالب نصفهم أولاد ، ربع عدد الأولاد يلبسون نظارات، ونصف عدد البنات يلبسون نظارات. أختير أحد الطلاب عشوائياً أوجد :
 (أ) احتمال أن يكون ولد يلبس نظارة (ب) احتمال أن يكون بنت أو يلبس نظارة ($\frac{5}{8}$ ، $\frac{1}{8}$)

(١٦) فصل دراسى به ٥٠ طالب من بينهم ٣٠ يدرسون الفيزياء و ٢٠ يدرسون الرياضيات ، ١٥ يدرسون المادتين معاً . أختير طالب عشوائياً أوجد احتمال :
 (أ) يدرس أحد المادتين على الأقل (ب) يدرس الفيزياء فقط
 ($\frac{3}{10}$ ، $\frac{7}{10}$)

(١٧) تجربة عشوائية عدد عناصر فضاء النواتج = ٢٤ والعناصر متساوية الإمكانات فإذا كان P ، ب حدثان فى ف حيث $n(P) = ١٣$ ، ل (ب) = $\frac{5}{24}$ ، ل (ب \cup ب) = $\frac{5}{24}$ ، أوجد احتمال وقوع P و ب معاً ، أوجد احتمال وقوع P أو عدم وقوع ب \bar{P}
 ($\frac{17}{24}$ ، $\frac{1}{8}$)

١٨) إدارة إحدى الشركات تضم ٣٠ موظفاً كما بالجدول . أختير أحد الموظفين عشوائياً أوجد احتمال :

المؤهل ← النوع ↓	مؤهل متوسط	مؤهل عال	مجموع
ذكر	٩	٣	١٢
أنثى	١٢	٦	١٨
مجموع	٢١	٩	٣٠

- ($\frac{2}{5}$)
 ($\frac{3}{5}$)
 ($\frac{21}{5}$)
 ($\frac{3}{5}$)

- أ) الموظف ذكر
 ب) مؤهل عال
 ج) أنثى مؤهل متوسط
 د) ذكر أو مؤهل عال

١٩) من مجموعة الأرقام { ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ } كُونَ عدد مكون من رقمين مختلفين احسب احتمال العدد زوجي أو رقم العشرات فردي

($\frac{7}{9}$)

٢٠) حقيبة بها ٢٥ بطاقة متماثلة مرقمة من ١ إلى ٢٥ سحبت بطاقة واحدة عشوائياً من الحقيبة . ما احتمال أن يكون العدد المكتوب على البطاقة المسحوبة :

($\frac{13}{25}$ ، $\frac{17}{25}$)

- أ) فردياً
 ب) فردياً أو يقبل القسمة على ٣

٢١) يصوب جنديان في وقت واحد نحو هدف ما فإذا كان احتمال أن يصيب الجندي الأول الهدف هو $\frac{1}{3}$ ، واحتمال أن يصيب الجندي الثاني نفس الهدف هو $\frac{2}{3}$ واحتمال أن يصيب الجنديان نفس الهدف معاً هو $\frac{1}{3}$ أوجد احتمال :

- أ) إصابة الهدف
 ب) إصابة الهدف من الجندي الأول فقط ($\frac{5}{6}$ ، $\frac{1}{6}$)

المتغير العشوائي

* تعريف: المتغير العشوائي

إذا كان ف فضاء عينة لتجربة عشوائية ، ح مجموعة الأعداد الحقيقية فإن أي دالة $s \rightarrow f \leftarrow$ ح تسمى متغيراً عشوائياً معرفاً على ف. وبتعريف آخر :

هو دالة تحدد لكل عنصر من عناصر فضاء العينة عدداً حقيقياً يتحدد من تعريف المتغير العشوائي

مدى المتغير العشوائي

هو مجموعة قيم نواتج ف بواسطة s وهي مجموعة جزئية من ح

* أنواع المتغير العشوائي

- (١) متقطع (وثاب): مداه مجموعة منتهية منفصلة (محدودة أو قابلة للحصر) جزئية من ح
- (٢) متصل: مداه فترة من الأعداد الحقيقية غير قابلة للحصر (فترة مغلقة أو مفتوحة)

التوزيعات الاحتمالية

التوزيع الاحتمالي : (للمتغير العشوائي المتقطع)

هو تحديد الاحتمالات المناظرة لقيم المتغير العشوائي

إذا كان s متغيراً عشوائياً مداه المجموعة = { s_1, s_2, \dots, s_n } فإن الدالة د حيث $d(s_r) = l(s) = r$ لكل $r = 1, 2, \dots$ ، ن تحدد ما يسمى بالتوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع s والذي يعبر عنه بمجموعة الأزواج المرتبة المحددة لبيان الدالة د . ويمكن كتابة التوزيع الاحتمالي على الصورة

s_r	s_1	s_2	s_n
$d(s_r)$	$d(s_1)$	$d(s_2)$	$d(s_n)$

مع ملاحظة أن

$$(1) \quad d(s_r) \in [0, 1] . \text{ لجميع قيم } r = 1, 2, \dots, n$$

$$(2) \quad d(s_1) + d(s_2) + \dots + d(s_n) = 1$$

الوسط الحسابي (التوقع) - التباين - الانحراف المعياري - معامل الاختلاف

* قوانين هامة

إذا كان s متغيراً عشوائياً متقطعاً يأخذ القيم s_1, s_2, \dots, s_n باحتمالات $d(s_1), d(s_2), \dots, d(s_n)$ على الترتيب فإن

$$(1) \quad \text{التوقع (الوسط الحسابي) أو المتوسط :}$$

هو القيمة التي تتمركز حولها معظم قيم المتغير العشوائي

$$\text{التوقع (الوسط الحسابي)} = \mu = \sum_{r=1}^n s_r \times d(s_r)$$

(٢) التباين: يبين انتشار قيم المتغير العشوائى حول متوسطه

$$\text{التباين} = \sigma^2 = \text{مجم} \text{س}^2 \times \text{د} (\text{س}) - \mu^2$$

(٣) الانحراف المعياري $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ (هو أحد مقاييس التشتت حول المتوسط)

$$(٤) \text{معامل الاختلاف} = \frac{\text{الانحراف المعياري}}{\text{الوسط الحسابي}} = 100 \times \frac{\sigma}{\mu}$$

أمثلة متنوعة

مثال ١ :

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي يحدد بالدالة د (س) = $\frac{\text{ك} + \text{س}}{17}$ حيث س = ١ ، ١ ، ٣ ، ٦ (أوجد: ١) قيمة ك (٢) التوزيع الاحتمالي. (٣) الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف.

$$\text{الحل: د(-١)} = \frac{1 - \text{ك}}{17} = (1) \text{د}, \frac{1 + \text{ك}}{17} = (1) \text{د}, \frac{3 + \text{ك}}{17} = (3) \text{د}, \frac{6 + \text{ك}}{17} = (6) \text{د}$$

$$\text{لكن د(-١)} + (1) \text{د} + (3) \text{د} + (6) \text{د} = 1 \therefore \frac{1 - \text{ك}}{17} + \frac{1 + \text{ك}}{17} + \frac{3 + \text{ك}}{17} + \frac{6 + \text{ك}}{17} = 1$$

$$\therefore \frac{9 + \text{ك}}{17} = 1 \therefore 9 + \text{ك} = 17 \therefore \text{ك} = 8$$

س	د(س)	س × د(س)	س ^٢ × د(س)
١ -	١٧/١	١٧/١ -	١٧/١
١	١٧/٣	١٧/٣	١٧/٩
٣	١٧/٥	١٧/١٥	١٧/٤٥
٦	١٧/٨	١٧/٤٨	١٧/٢٨٨
المجموع	١	١٧/٦٥	١٧/٣٣٧

س	١ -	١	٣	٦
د(س)	١/١٧	٣/١٧	٥/١٧	٨/١٧

$$\therefore \mu = \text{مجم} \text{س} \times \text{د(س)} = \frac{60}{17}$$

$$\text{التباين} = \sigma^2 = \text{مجم} \text{س}^2 \times \text{د(س)} - \mu^2 = \frac{337}{17} - \left(\frac{60}{17}\right)^2 = 0.2$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{0.2} = 0.447 \approx 0.228$$

$$\text{معامل الاختلاف} = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \left(\frac{0.228}{\frac{60}{17}}\right) \times 100 = 63.963\%$$

مثال ٢ :

في تجربة إلقاء قطعة عملة معدنية ٣ مرات وملاحظة الوجه الظاهر، إذا كان المتغير العشوائي يعبر عن " عدد الصور

"أوجد: (١) مدى المتغير العشوائي. (٢) التوزيع الاحتمالي

عدد الصور	الحدث
٣	(ص،ص،ص)
٢	(ص،ص،ك)
٢	(ص،ك،ص)
١	(ص،ك،ك)
٢	(ك،ص،ص)
١	(ك،ص،ك)
١	(ك،ك،ص)
صفر	(ك،ك،ك)

الحل

$$\text{المدى} = \{ ٣, ٢, ١, ٠, \text{صفر} \}$$

التوزيع الاحتمالي :

سر	٠	١	٢	٣
د (سر)	٨/١	٨/٣	٨/٣	٨/١

مثال (٣)

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً توزيعه الاحتمالي معرفاً كالاتي:

إذا كان $\mu = ٢.٦$. أوجد قيمة كلاً من μ ، ب

سر	٢	٣
د (سر)	٢	ب

$$\text{الحل : } \mu = ٢ + ب = ١ \quad (١)$$

$$\mu = ٢ \times \text{د (سر)} + ٣ \times \text{ب} = ٢.٦$$

$$\therefore ٢.٦ = ٢ + ٣ب \quad (٢)$$

$$\text{من (١) } ب = ١ - ٢ = -١ \quad (٣) \quad \text{بالتعويض من (٣) في (٢)}$$

$$\therefore ٢.٦ = ٢ + ٣(-١) = ٢ - ٣ = -١ \quad \therefore ٢.٦ = -١ + ٣ب$$

$$\text{بالتعويض في (٣) } ب = ١ - ٢ = -١ \quad \therefore ٢.٦ = -١ + ٣ب$$

مثال ٤ : صندوقان بكل منهما ثلاث كرات مرقمة من ١ إلى ٣، سحبت كرة عشوائياً من كل صندوق، وعرف المتغير العشوائي بأنه حاصل ضرب العددين الموجودين على الكرتين المسحوبتين. أوجد التوزيع الاحتمالي والتوقع للمتغير العشوائي.

الحل :

٣	٢	١	×
٣	٢	١	١
٦	٤	٢	٢
٩	٦	٣	٣

$$\text{المدى} = \{ ٩, ٦, ٤, ٣, ٢, ١ \}$$

التوزيع الاحتمالي :

سر	١	٢	٣	٤	٦	٩	المجموع
د (سر)	٩/١	٩/٢	٩/٢	٩/١	٩/٢	٩/١	١

$$\mu = ١ \times \frac{١}{٩} + ٢ \times \frac{٢}{٩} + ٣ \times \frac{٢}{٩} + ٤ \times \frac{١}{٩} + ٦ \times \frac{٢}{٩} + ٩ \times \frac{١}{٩} = ٤$$

مثال (٥) : إذا كان معامل الاختلاف لمتغير ما ٨ % وكان الوسط الحسابي له يساوي ٧٥ أوجد : انحرافه المعياري وكذلك تباينه .

$$\text{الحل : معامل الاختلاف} = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\% \therefore \frac{\sigma}{75} \times 100\% = 8\%$$

$$\therefore 100\sigma = 600 \quad \therefore \sigma = 6 \quad \therefore \text{التباين} = 2\sigma = 36$$

مثال ٦ متغير عشوائي وسطه الحسابي ١٢٥ ، تباينه ٢٥ . أوجد معامل الاختلاف .

$$\text{الحل : } 2\sigma = 25 \quad \therefore \sigma = 12.5 \quad \text{معامل الاختلاف} = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\% = \frac{12.5}{125} \times 100\% = 10\%$$

مثال (٧) :

إذا كان س متغيراً عشوائياً متقطعاً مداه = {١، ٢، ٣، ٤} وكان :

ل(س=١) = ٠.٣ ، ل(س=٣) = ٠.٤ ، ل(س=٤) = ٠.١ أوجد التوزيع الاحتمالي ثم أحسب الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري .

الحل :

$$\begin{aligned} \text{ل(س=١)} + \text{ل(س=٢)} + \text{ل(س=٣)} + \text{ل(س=٤)} &= 1 \\ 0.3 + \text{ل(س=٢)} + 0.4 + 0.1 &= 1 \\ \therefore \text{ل(س=٢)} &= 1 - 0.1 - 0.4 = 0.5 \end{aligned}$$

س	١	٢	٣	٤	المجموع
د(س)	٠.٣	٠.٢	٠.٤	٠.١	١

$$\begin{aligned} \text{التوقع} = \mu &= \text{مجم س} \times \text{د(س)} = 0.3 \times 1 + 0.2 \times 2 + 0.4 \times 3 + 0.1 \times 4 = 2.3 \\ \text{التباين} = \sigma^2 &= \text{مجم س}^2 \times \text{د(س)} - \mu^2 = 0.3 \times 1^2 + 0.2 \times 2^2 + 0.4 \times 3^2 + 0.1 \times 4^2 - (2.3)^2 = 1.01 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{الانحراف المعياري} = \sigma = 1.005 \quad \text{معامل الاختلاف} = \frac{\sigma}{\mu} \times 100\% = \frac{1.005}{2.3} \times 100\% = 43.7\%$$

تمارين (٢)

(١) ألقى قطعة نقود منتظمة مرتين متتاليتين وعرف المتغير العشوائي س على أنه عدد مرات ظهور الصورة . صف المتغير العشوائي وأكتب مداه والتوزيع الاحتمالي ثم احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري (٠.٧، ١)

(٢) خمسة بطاقات مرقمة من ١ إلى ٥ سحب بطاقتان الواحدة بعد الأخرى بدون إحلال ز وعرف المتغير العشوائي س على أنه الفرق المطلق بين الرقمين . أوجد معامل الاختلاف للمتغير العشوائي س . (٥٠%)

(٣) يلقي لاعب حجر نرد منتظم إذا ظهر عدد أولى فإنه يكسب مثل هذا العدد من النقطة ، وإذا ظهر عدد غير أولى فإنه يخسر مثل هذا العدد من النقطة . أوجد التوقع ، وهل فرصة المكسب أكبر من فرصة الخسارة في هذه اللعبة ؟ (- ، $\frac{1}{6}$ ، لا)

٤) خمسة بطاقات مرقمة من ١ إلى ٥ سحبت بطاقتان الواحدة بعد الأخرى بدون إحلال وعرف المتغير العشوائى س على أنه مجموع الرقمين على البطاقتين . أوجد التوزيع الاحتمالى والانحراف المعياري للمتغير العشوائى س .
(١.٣٧، ٦)

٥) صندوقين بكل منهما ٣ كرات مرقمة بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣ سحبت كرة من كل صندوق وعرف المتغير العشوائى س على أنه حاصل ضرب العددين على الكرتين أوجد الانحراف المعياري (٢.٤)

٦) حجر نرد منتظم فيه ٣ أوجه عليها نقطة واحدة ووجهان عليها نقطتين ووجه واحد عليه ثلاث نقط . ألقى حجر النرد مرتين متتاليتين وعرف المتغير العشوائى س على أنه مجموع لنقط على الوجهين . احسب الوسط الحسابى والانحراف المعياري
(١.٠٥، $\frac{1}{3}$)

٧) س متغير عشوائى متقطع مداه { ١ ، ٢ ، ٣ } أثبت أن الدالة د حيث د(س) = $\frac{س}{٦}$ هى دالة توزيع احتمالى للمتغير العشوائى س ثم أوجد :
أ) ل (س < ١) ب) الانحراف المعياري
(٠.٧٦، $\frac{٥}{٦}$)

٨) س متغير عشوائى متقطع مداه { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ } و توزيعه الاحتمالى بالدالة د(س) = $\frac{س+١}{٢٦}$ فاوجد قيمة μ ثم احسب المتوسط والانحراف المعياري
(١.١، ٢.٦٩، ٤)

٩) س متغير عشوائى متقطع مداه { -٢ ، -١ ، ١ ، ٧ } و توزيعه الاحتمالى بالدالة د حيث :
د (-١) = ٢ د (٧) = $\frac{1}{3}$
اكتب التوزيع الاحتمالى ثم احسب الوسط الحسابى والانحراف المعياري
(٢.٣، $\frac{1}{6}$)

١٠) س متغير عشوائى متقطع مداه { ٢ ، ٥ } ومتوسطه $\mu = ٣$. أوجد التوزيع الاحتمالى واحسب الانحراف المعياري
(١.٤)

س	٣ -	٢ -	١	٢
د(س)	٨/١	٨/١	م	٢/١

١١) س متغير عشوائى متقطع توزيعه الاحتمالى :
أوجد قيمة μ
احسب المتوسط والتباين
(٠.٢٥)
(٣.٥، ٠.٦٢٥)

س	٢ -	١	ك	٤
د(س)	م	٢ م	٠.٥	م

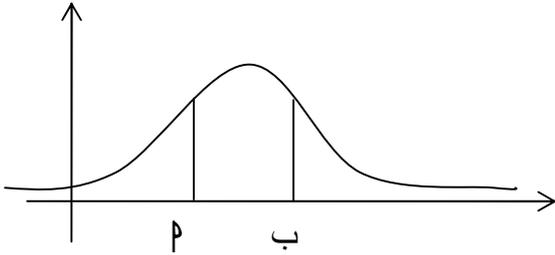
١٢) س متغير عشوائى متقطع متوسطه $\mu = ١.٥$
توزيعه الاحتمالى كما بالجدول الآتى:
أوجد قيمة كل من ك ، م ثم اوجد الانحراف المعياري
(٢.٠٥، ٨/١، ٢)

س	٠	١	٢	٣
د(س)	ك	ك	٤/ك	٤/ك

١٣) س متغير عشوائى متقطع توزيعه الاحتمالى كما بالجدول الآتى:
أوجد قيمة ك ثم احسب المتوسط والانحراف المعياري
(١.٠٥٣، $\frac{٧}{٨}$ ، $\frac{1}{٢}$)

***التوزيعات الاحتمالية المتصلة (دالة الكثافة)**

إذا كان s متغيراً عشوائياً متصلاً يكون مداه فترة مفتوحة أو مغلقة من الأعداد الحقيقية حساب الاحتمال يتم بطريقة مختلفة وذلك بتعرف دالة الكثافة d :



دالة الكثافة : تسمى دالة كثافة إذا كان

$\forall m, b \in \mathbb{R}$ لمدى s حيث $m \leq b$ فإن

$L(m \leq s \leq b) =$ مساحة المنطقة الواقعة تحت منحنى هذه الدالة و فوق محور السينات في الفترة من m إلى b .

خواص دالة الكثافة

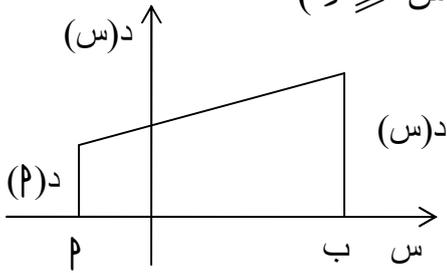
(١) منحنى الدالة يقع بكامله أعلى محور السينات

(٢) $L(s = m) =$ صفر

(٣) إذا كان مدى المتغير العشوائى هو $[m, n]$ فإن $L(m \leq s \leq n) = 1$

المساحة تحت المنحنى وفوق محور السينات بين $s = m, s = n$ هي الواحد الصحيح .

$$(4) L(s \geq m) = L(m < s) = L(s \geq m) \quad (5) L(m < s < n) =$$



(٥) فى الشكل المقابل :

$$L(m \leq s \leq n) = \frac{1}{2} (d(m) + d(n)) \times (n - m)$$

تذكر أن

(١) مساحة المثلث = (القاعدة \times الارتفاع) $\div 2$

(٢) مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه (الطول \times العرض)

(٣) مساحة شبه المنحرف = مجموع القاعدتين المتوازيتين \times الارتفاع $\div 2$

مثال (١) .

إذا كان s متغيراً عشوائياً متصلاً، و دالة كثافة الاحتمال له هي:

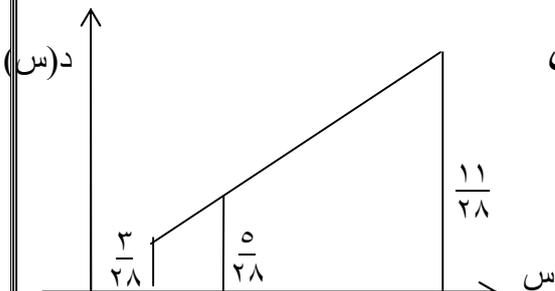
$$d(s) = \begin{cases} \frac{1+s}{28} & \text{عندما } 1 < s < 5 \\ 0 & \text{فيما عدا ذلك} \end{cases}$$

(١) أثبت أن $d(s)$ دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائى s

(٢) أوجد $L(s > 2)$.

$$\text{الحل : } d(1) = \frac{3}{28}, d(5) = \frac{11}{28}, d(2) = \frac{5}{28}$$

$$L(1 < s < 5) = \text{المساحة الكلية}$$



$$\frac{1}{4} = [(1)د + (5)د] (1 - 5)$$

$$1 = \frac{14}{28} \times 2 = 4 \times \left(\frac{11}{28} + \frac{3}{28} \right) \frac{1}{4} =$$

∴ المنحنى يقع بكامله أعلى محور السينات ∴ د (س) دالة الكثافة للمتغير العشوائى س

$$ل (س > 2) = ل (س > 1) = \frac{1}{4} [(2)د + (1)د] (1 - 2)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{28} \times \frac{1}{2} = 1 \times \left(\frac{5}{28} + \frac{3}{28} \right) \frac{1}{2} =$$

مثال ٢ :

إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هى:

عندما $0 < س < 4$

س p

صفر

} = د (س)

فيما عدا ذلك

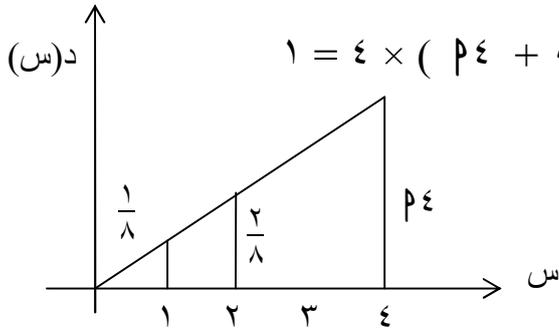
أوجد: (١) قيمة p ، ل (٢ > س > ١)

الحل : د(صفر) = صفر ، د(٤) = p٤

المساحة الكلية = $\frac{1}{4} [(٤)د + (٠)د] (٠ - ٤) = ١ = ٤ \times (p٤ + ٠)$

$$\frac{1}{8} = p \therefore ١ = p٨$$

$$\frac{2}{8} = p٢ = د(٢) ، \frac{1}{8} = p = د(١)$$



$$ل (٢ > س > ١) = \frac{1}{4} [(٢)د + (١)د] (١ - ٢) \times (1 - 2)$$

$$\frac{3}{16} = 1 \times \left(\frac{2}{8} + \frac{1}{8} \right) \frac{1}{4} =$$

مثال ٣ : إذا كان س متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هى:

عندما $1 < س < 4$

$$\frac{1+س^3}{٤٠}$$

صفر

} = د (س)

فيما عدا ذلك

أوجد ل (٣ > س > ١).

الحل :

$$د(٣) =$$

$$د(١) =$$

$$ل (٣ > س > ١) = \frac{1}{4} [(٣)د + (١)د] (١ - ٣)$$

$$\frac{7}{20} = \frac{14}{40} = 2 \times \left(\frac{10}{40} + \frac{4}{40} \right) \frac{1}{4} =$$

تمارين (٣) على دالة الكثافة

(١) إذا كان S متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 0 \leq S \leq 3 \\ \frac{1+S^2}{12} \end{array} \right\} = (S) \text{ د}$$

فيما عدا ذلك

صفر

(١) أثبت أن D هي دالة كثافة احتمال المتغير S

(٢) أوجد كل من $L(1 < S < 3)$ ، $L(S < 2)$

$$\left(\frac{1}{6} , \frac{5}{6} \right)$$

(٢) إذا كان S متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 2 \leq S \leq 4 \\ \frac{1}{8}(S+1) \end{array} \right\} = (S) \text{ د}$$

فيما عدا ذلك

صفر

(١) حقق أن $L(2 \leq S \leq 4) = 1$

(٢) أوجد $L(2 \leq S \leq 3)$

$$\left(\frac{7}{16} \right)$$

(٣) إذا كان S متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 0 \leq S \leq 1 \\ \frac{4}{1} \\ \text{عندما } 1 < S \leq 3 \\ \frac{1}{8}(S+1) \end{array} \right\} = (S) \text{ د}$$

فيما عدا ذلك

صفر

(١) أثبت أن D هي دالة كثافة احتمال المتغير S

(٢) أوجد كل من $L(-4 < S < 2)$ ، $L(S < 2)$

$$\left(\frac{7}{16} , \frac{9}{16} \right)$$

(٤) إذا كان S متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 1 \leq S \leq 5 \\ \frac{2S+K}{36} \end{array} \right\} = (S) \text{ د}$$

فيما عدا ذلك

صفر

(١) أوجد قيمة K

(٢) أوجد $L(|S| > 2)$

$$\left(\frac{1}{4} , 2 \right)$$

(٥) إذا كان S متغيراً عشوائياً متصلاً دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$\left. \begin{array}{l} \text{عندما } 1 \leq S \leq K \\ \frac{S+3}{10} \end{array} \right\} = (S) \text{ د}$$

فيما عدا ذلك

صفر

(١) أوجد قيمة K (٢) $L(2 \leq S \leq 5)$

(٣) أوجد $L(S = 2)$

$$\left(3 , \frac{11}{20} , \text{صفر} \right)$$

المتغير العشوائى الطبيعي

هو متغير عشوائى متصل مداه = ح ودالة كثافة احتماله تمثل بالمنحنى الطبيعي (منحنى الجرس أو منحنى كارل جاوس).

خواص المنحنى الطبيعي

يقال لمتغير عشوائى أنه يتبع توزيعا طبيعيا إذا كان :

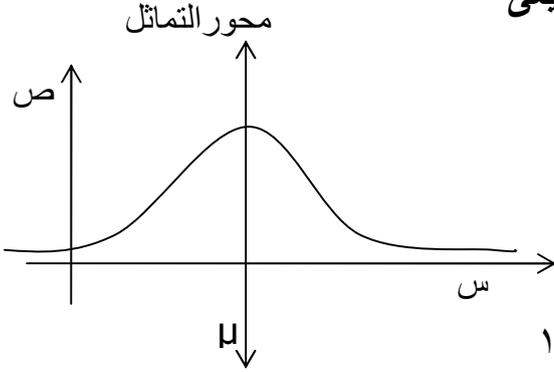
(١) المتغير متصل ومداه $[-\infty, \infty]$

(٢) منحنى دالة الكثافة له يأخذ شكل الجرس

(٣) المنحنى متماثل حول المستقيم $\mu =$

(٤) يتحكم فى شكل المنحنى قيمتين فقط هما التوقع μ و الانحراف المعياري σ ويتغيران من سؤال لآخر

(٥) المساحة الكلية أسفل المنحنى وفوق محور السينات = ١



منحنى التوزيع الطبيعي المعياري ص:

(١) المدى $[-\infty, \infty]$

(٢) متوسطه $\mu =$ صفر وانحرافه المعياري $\sigma = ١$

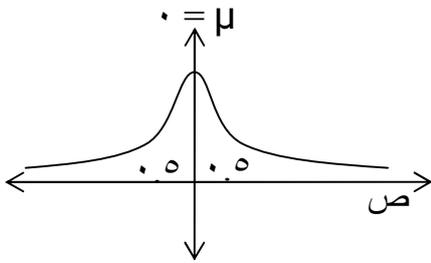
(٣) المساحة الكلية أسفل المنحنى وأعلى محور السينات = ١

(٤) المحور الرأسى $\mu = ٠$ يقسم المساحة تحت المنحنى

الى نصفين متماثلين مساحة كل منها = ٠.٥

(٥) تم إعداد جدول يعطى المساحة المساوية للاحتمال ل $(٠ < ص < \mu)$

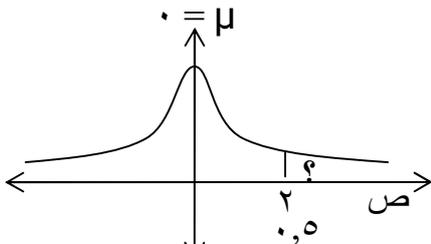
(٦) ل $(\mu < ص < \mu + ١)$ ويستخدم الجدول مباشرة



أمثلة : المجموعة الاولى :

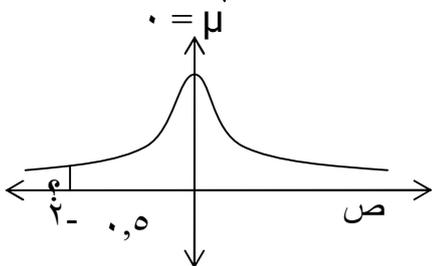
(١) ل $(٢ < ص < ٠)$ ل - ٠.٥ = $(٢ > ص < ٠)$ ل

$$٠.٠٢٢٨ = ٠.٤٧٧٢ - ٠.٥ =$$



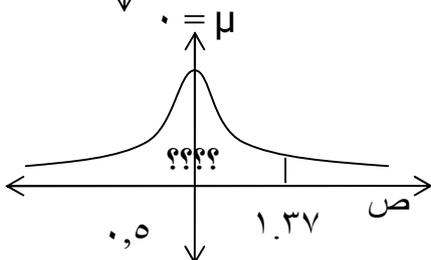
(٢) ل $(٢ > ص < ٠)$ ل - ٠.٥ = $(٢ > ص < ٠)$ ل

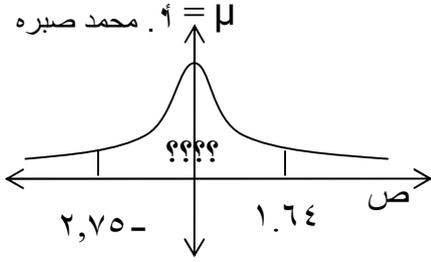
$$٠.٠٢٢٨ = ٠.٤٧٧٢ - ٠.٥ =$$



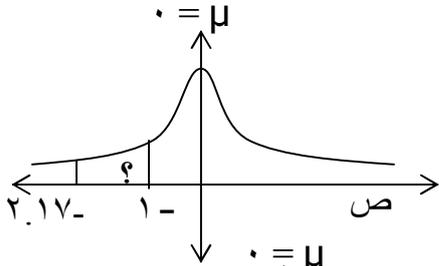
(٣) ل $(١.٣٧ > ص < ٠)$ ل + ٠.٥ = $(١.٣٧ > ص < ٠)$ ل

$$٠.٩١٤٧ = ٠.٤١٤٧ + ٠.٥ =$$

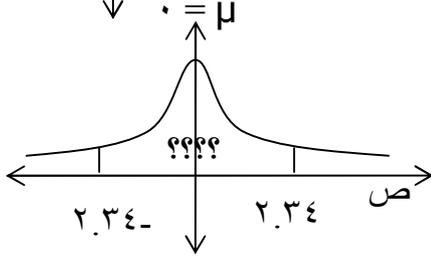




$$L(4) = P(2.75 < V < 1.64) + P(1.64 < V < 0) = 0.4495 + 0.4970 = 0.9465$$



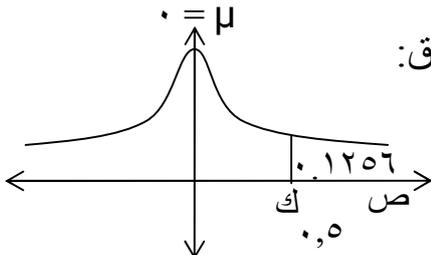
$$L(5) = P(2.17 < V < -1) - P(2.17 < V < 0) = 0.4850 - 0.3413 = 0.1437$$



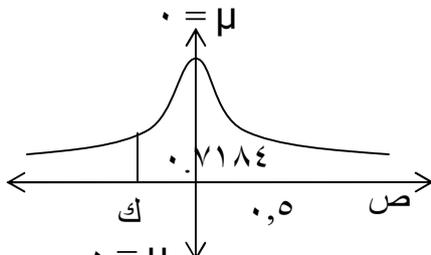
$$L(6) = P(2.34 \leq V \leq -2.34) = 2 \times P(2.34 \leq V \leq 0) = 2 \times 0.4904 = 0.9808$$

المجموعة الثانية :

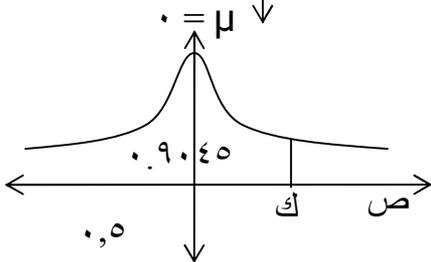
إذا كان V متغير عشوائياً طبيعياً معيارياً، فأوجد قيمة K التي تحقق:



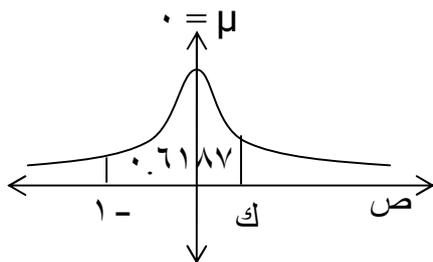
$$1 - L(K) = 0.1256 \Rightarrow L(K) = 0.8744 \Rightarrow K = 1.15$$



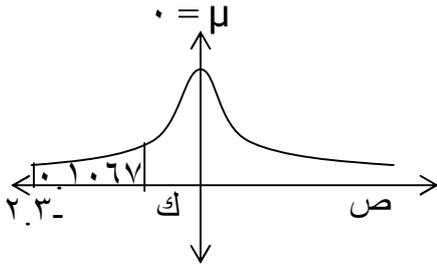
$$L(K) = 0.7184 \Rightarrow K = 0.58$$



$$L(K) = 0.9045 \Rightarrow K = 1.31$$



$$L(K) = 0.6187 \Rightarrow K = 0.76$$



$$\begin{aligned} \text{ل} (- ٢.٣ > \text{ص} > \text{ك}) &= ٠.١٠٦٧ \\ \text{ل} (\text{ص} > ٠) &= ٠.١٠٦٧ + \text{ل} (\text{ك} > \text{ص} > ٠) \\ \therefore \text{ل} (\text{ص} > ٠) &= \text{ل} (\text{ك} > \text{ص} > ٠) + \text{ل} (\text{ص} > ٠) \\ \text{ل} (\text{ك} > \text{ص} > ٠) &= ٠.١٠٦٧ - \text{ل} (\text{ص} > ٠) \\ \text{ل} (\text{ك} > \text{ص} > ٠) &= ٠.١٠٦٧ - ٠.٤٨٩٣ = ٠.٣٨٢٦ \\ \therefore \text{ك} &= ١.١٩ \end{aligned}$$

تمارين (٤)

أولاً (إذا كان ص متغير عشوائي طبيعي معيارى أوجد قيمة كل من :

$$\text{ل} (٢- \geq \text{ص} \geq ٠)$$

$$\text{ل} (٠ \geq \text{ص} \geq ٠.٧٣)$$

$$\text{ل} (\text{ص} < ١.٠٧)$$

$$\text{ل} (٠ \geq \text{ص} \geq ١.٢٧٧)$$

$$\text{ل} (\text{ص} < - ١.٤٣)$$

$$\text{ل} (- ٠.٧ \geq \text{ص} \geq ٢.٢٥)$$

$$\text{ل} (- ٢ \geq \text{ص} \geq - ١.٥)$$

$$\text{ل} (- ٠.٣٢ \geq \text{ص} \geq ٠.٧٥)$$

$$\text{ل} (- ٢ \geq \text{ص} \geq ٢)$$

$$\text{ل} (٠.٥ \geq \text{ص} \geq ١.٥)$$

ثانياً (أوجد قيمة ك التي تحقق في كل من الحالات الآتية :

$$\text{ل} (\text{ك} > \text{ص} > ٠) = ٠.٣٩٤٤$$

$$\text{ل} (٠ > \text{ص} > \text{ك}) = ٠.٤٦٧٨$$

$$\text{ل} (\text{ص} < \text{ك}) = ٠.٣٠١٥$$

$$\text{ل} (\text{ص} < \text{ك}) = ٠.٨٣١٥$$

$$\text{ل} (\text{ص} > \text{ك}) = ٠.٣٩٣٦$$

$$\text{ل} (\text{ص} > \text{ك}) = ٠.٨٢٣٨$$

$$\text{ل} (- ٢.٦ \geq \text{ص} \geq \text{ك}) = ٠.١٤٤٥$$

$$\text{ل} (- ١.٦ \geq \text{ص} \geq \text{ك}) = ٠.٨٤١٤$$

$$\text{ل} (\text{ص} < \text{ك}) = ٠.٥$$

$$\text{ل} (- \text{ك} \geq \text{ص} \geq \text{ك}) = ٠.٩١٠٨$$

حساب الاحتمالات للمتغير الطبيعي غير المعياري

(غير القياسي): (س)

يلزم التحويل للمتغير الطبيعي المعياري (س) باستخدام القاعدة:

$$\frac{\mu - س}{\sigma} = ص$$

$$ل(س > ب) = ل\left(\frac{\mu - ب}{\sigma} > ص\right)$$

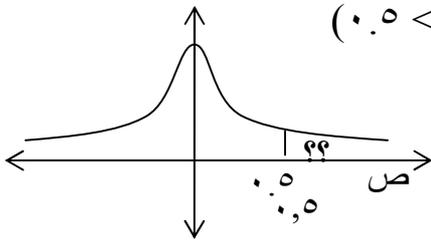
س = القيمة الحقيقية (غير المعيارية) ، ص = القيمة المعيارية ، μ = الوسط الحسابي (التوقع) ، σ = الانحراف المعياري

المجموعة الثالثة

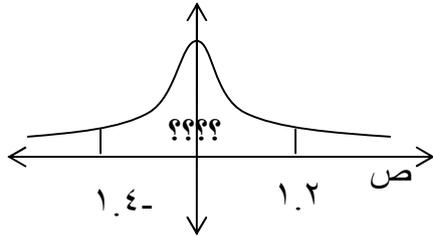
١- إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه ٠.٣٥ وتباينه ٠.٢٥ أوجد:

$$ل(س < ٠.٦) \quad ل(ب - ٠.٣٥ > س > ٠.٩٥)$$

الحل



$$ل(س < ٠.٦) = ل\left(\frac{٠.٣٥ - ٠.٦}{٠.٥} < ص\right) = ل(٠ < ص > ٠.٥) = ٠.٣٠٨٥ = ٠.١٩١٥ - ٠.٥ =$$



$$ل(ب - ٠.٣٥ > س > ٠.٩٥) = ل\left(\frac{٠.٣٥ - ٠.٩٥}{٠.٥} > ص > \frac{٠.٣٥ - ٠.٣٥}{٠.٥}\right) = ل(-١.٢ > ص > ٠) = ل(٠ > ص > ١.٢) + ل(١.٢ > ص > ٠) = ٠.٣٨٤٩ + ٠.٤١٩٢ = ٠.٨٠٤١ =$$

٢- إذا كان س متغيراً عشوائياً طبيعياً متوسطه = ١٧ وانحرافه المعياري ٤ أوجد

$$قيمة ك بحيث : ل(س > ك) = ٠.٩١١٥ \quad ل(س < ك) = ٠.٣٠١٥$$

الحل

$$ل(س > ك) = ل\left(\frac{١٧ - ك}{٤} > ص\right) = ٠.٩١١٥ \quad \text{افرض أن } ي = \frac{١٧ - ك}{٤}$$

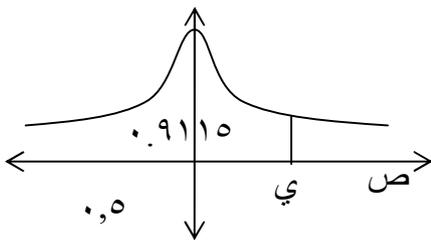
$$ل(ص > ي) = ٠.٩١١٥$$

$$ل(٠ > ص > ي) = ٠.٥ - ٠.٩١١٥ = ٠.٤١١٥$$

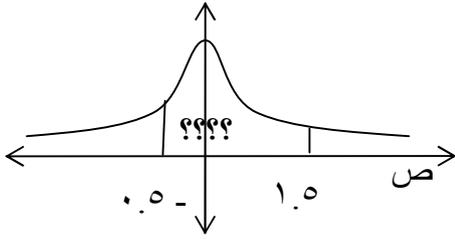
من الجدول ي = ١.٣٥

$$\therefore \frac{١٧ - ك}{٤} = ١.٣٥$$

$$\therefore ١٧ - ك = ٥.٤ \quad \therefore ك = ١٧ + ٥.٤ = ٢٢.٤$$

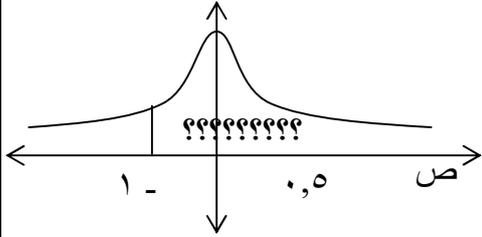


٥) إذا كان s متغيراً عشوائياً طبيعياً ووسطه الحسابي $\mu = 17$ ، انحرافه المعياري $\sigma = 2$ أوجد : أ- ل ($16 < s < 20$) ب- ل ($15 < s$)



الحل

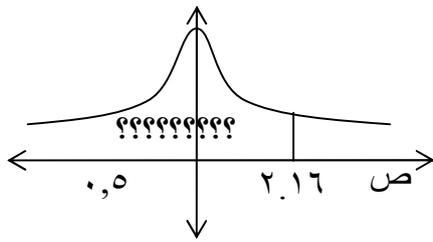
$$\begin{aligned} \text{أ- ل } (16 < s < 20) &= \text{ل} \left(\frac{17-16}{2} < \text{ص} < \frac{17-20}{2} \right) \\ &= \text{ل} (0.5 < \text{ص} < 1.5) \\ &= \text{ل} (0 < \text{ص} < 0.5) + \text{ل} (0.5 < \text{ص} < 1.5) \\ &= 0.1915 + 0.4332 \\ &= 0.6247 \end{aligned}$$



ب- ل ($15 < s$) = ل ($\frac{17-15}{2} < \text{ص}$) = ل ($1 < \text{ص}$) =

$$0.8413 = 0.3413 + 0.5 =$$

٦) إذا كان الدخل الشهري لمجموعة مكونة من ٤٠٠ عامل يتبع توزيعاً طبيعياً ووسطه الحسابي ٢٥٠ جنيهاً وانحرافه المعياري ٢٥ جنيهاً فأوجد عدد العمال الذين يقل دخلهم عن ٣٠٤ جنيهاً.



الحل

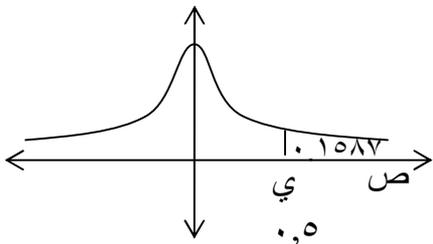
$\mu = 250$ جنيهاً
 $\sigma = 25$ جنيهاً
 العدد الكلي = ٤٠٠

ل ($304 > s$) = ل ($\frac{304-250}{25} > \text{ص}$) = ل ($2.16 > \text{ص}$) =

$$0.9846 = 0.4846 + 0.5 =$$

العدد الكلي = $400 \times 0.9846 = 393.84 = 394$ عامل

٧) إذا كان s متغيراً عشوائياً ووسطه الحسابي $\mu = 45$ وانحرافه المعياري $\sigma = 4$ فأوجد قيمة k إذا كان: ل ($s < k$) = ٠.١٥٨٧



الحل : $\sigma = 4$ ، $\mu = 45$

ل ($s < k$) = ٠.١٥٨٧ = ل ($\frac{45-k}{4} < \text{ص}$) = ل ($\frac{k-45}{4} = \text{بوضع ي}$)

\therefore ل ($\text{ص} < \frac{k}{4}$) = ٠.١٥٨٧

ل ($0 < \text{ص} < \frac{k}{4}$) = ٠.٣٤١٣ = ٠.١٥٨٧ - ٠.٥ =

بالكشف العكسي من الجدول $1 =$

$\therefore 1 = \frac{45-k}{4} \therefore k = 45 - 4 = 49$

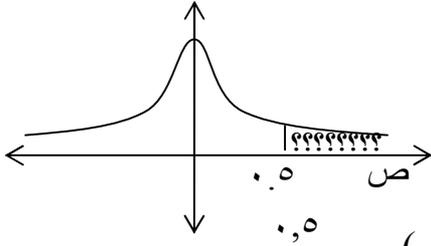
٨) إذا كانت أوزان الطلاب في إحدى الكليات تتبع توزيعاً طبيعياًً وسطه الحسابى $\mu = 68$ كجم، تباينه 16 كجم^٢. فأوجد:
 أ- احتمال أن يكون الوزن أكبر من 70 كجم.

ب- النسبة المئوية للطلاب الذين تقع أوزانهم بين 65 كجم، 72 كجم.

ج- عدد الطلاب الذين يزيد وزنهم عن 66 كجم وذلك إذا كان عدد طلاب الكلية $= 2000$ طالب.

الحل $\mu = 68$ $\epsilon = \sigma$

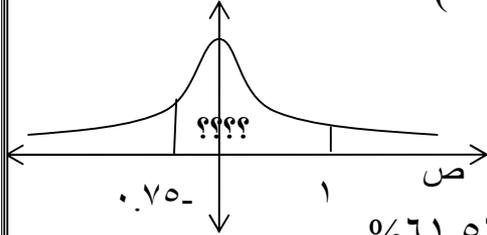
أ- ل(س > 70) = ل(ص < $\frac{68-70}{\epsilon}$) = ل(ص < -0.5) = 0.1915 - 0.5 = 0.3085



ب- ل(65 > س > 72) = ل($\frac{68-72}{\epsilon} > ص > \frac{68-65}{\epsilon}$)

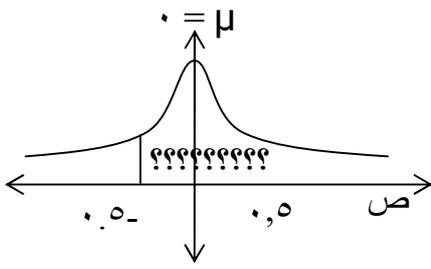
= ل(-0.75 > ص > 0.75) = ل(ص > 0.75) + ل(ص < -0.75) = 0.2743 + 0.3413 = 0.6156

النسبة المئوية = الاحتمال × العدد الكلى = 0.6156 × 100% = 61.56%



ج- ل(س < 66) = ل(ص < $\frac{68-66}{\epsilon}$) = ل(ص < 0.5) = 0.6915

العدد = الاحتمال × العدد الكلى = 0.6915 × 2000 = 1383



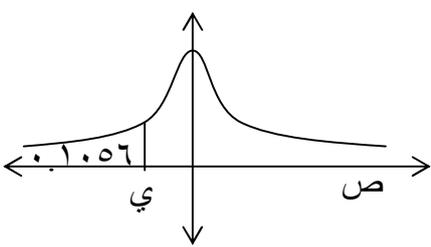
٩- وجد أن أطوال نوع معين من النبات تكون موزعة حسب التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 50 سم وانحراف معيارى σ . فإذا علم أن أطوال 10.56% من هذا النبات أقل من 45 سم. فأوجد التباين لأطوال هذا النبات.

الحل

ل(س > 45) = 0.1056 = ل(ص > $\frac{50-45}{\sigma}$)
 ل(ص < $\frac{50}{\sigma}$) = 0.1056

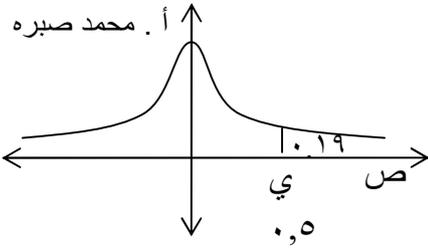
بوضع $ي = \frac{50}{\sigma}$ ∴ ل(ص < ي) = 0.1056 ∴ ل(ص > 0) = 0.1056 - 0.5 = 0.3944

∴ $ي = 1.25$ ∴ $1.25 = \frac{50}{\sigma}$ ∴ $\sigma = 4$ ∴ التباين = $2\sigma = 16$



١٠) إذا كانت درجات الطلاب في إحدى الامتحانات تتبع توزيعاً طبيعياً بمتوسط قدره 61 درجة وانحراف معيارى 12 ، فإذا كان 19% يحصلون على تقدير ممتاز. فأوجد أقل درجة لكى يحصل الطالب على تقدير ممتاز

الحل



نفرض هذه الدرجة = ك

$$ل(س < ك) = ٠,١٩ \therefore ل(ص < \frac{ك - ٦١}{١٢}) = ٠,١٩$$

$$بوضع ي = \frac{ك - ٦١}{١٢} \therefore ل(ص < ي) = ٠,١٩$$

$$\therefore ل(٠ < ص > ي) = ٠,١٩ - ٠,٥ = ٠,٣١$$

بالكشف العكسي من الجدول ي = ٠,٨٨

$$\therefore \frac{ك - ٦١}{١٢} = ٠,٨٨ \therefore ك - ٦١ = ٠,٨٨ \times ١٢ = ١٠,٥٦$$

$\therefore ك = ٦١ + ١٠,٥٦ = ٧١,٥٦$ وهي أقل درجة لكي يحصل الطالب على تقدير ممتاز

تمارين (٥)

(١) إذا كان س متغير عشوائي طبيعي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ :
أوجد قيمة كل :

$$(١) ل(س > \mu - \sigma) \quad (٢) ل(\mu > س > \mu + \sigma)$$

$$(٣) ل(س > \mu - ٠,٥\sigma) \quad (٤) ل(س < \mu - \sigma)$$

$$(٥) ل(\mu - \sigma > س > \mu + \sigma)$$

أوجد قيمة ك في الحالات الآتية :

$$(٦) ل(\mu - ك - \sigma > س > س + ك + \sigma) = ٠,٩٨٧٦ \quad (٢,٥)$$

$$(٧) ل(س < \mu + ٢ك - \sigma) = ٠,٩٤٠٦ \quad (٠,٧٨ -)$$

(٢) إذا كان س متغير عشوائي له توزيع طبيعي متوسطه $\mu = ١٨$ وانحراف معياري $\sigma = ٢,٥$. أوجد :

أولاً : ل(س > ١٥) ثانياً : ل(س < ٢٣)

ثالثاً : ل(١٧ > س > ٢٣) رابعاً : قيمة ك إذا كان ل(س < ك) = ٠,١٨١٤

(٠,١١٥١, ٠,٠٢٢٨, ٠,٥٤٠٣, ٠,٢٧٥, ٢٠)

(٣) إذا كان س متغير عشوائي له توزيع طبيعي متوسطه $\mu = ١٥$ وتباينه $\sigma^2 = ٩$. أوجد :

أولاً : ل(٠ > س > ١٨) ثانياً : ل(س < ٢٠)

ثالثاً : ل(س < ١١) رابعاً : قيمة ك إذا كان ل(س > ك) = ٠,١٥٨٧

(٠,٨٤١٣, ٠,٠٤٧٥, ٠,٩٠٨٢, ١٢)

(٤) إذا كانت أطوال مجموعة من الطلاب تتبع توزيع طبيعي متوسطه μ وانحرافه المعياري $\sigma = ٨$ سم . فإذا كان الطول لمعياري لطالب طوله ١٨٠ سم هو ١,٢٥ أوجد المتوسط μ . (١٧٠)

(٥) إذا كانت درجات الطلاب في أحد الامتحانات تتبع توزيع طبيعي متوسطه ٤٠ درجة واتيابين ٢٥ . أوجد : أولاً : احتمال أن تكون درجة الطالب أكبر من ٤٥ درجة (٠.١٥٨٧)
ثانياً : النسبة المئوية للطلاب الذين تزيد درجاتهم عن ٤٥ درجة (١٥.٨٧%)

(٦) إذا كان الدخل الشهري لعدد ٧٠٠ أسرة يتبع توزيع طبيعي متوسطه ٣٥٠ جنيه بانحراف معيارى ١٠٠ جنيه . أوجد :
أولاً : احتمال أن يكون دخل الأسرة أكبر من ٤٠٠ جنيه (٠.٣٠٨٥)
ثانياً : النسبة المئوية للأسر التى يزيد دخلها عن ٤٠٠ جنيه (٣٠.٨٥%)
ثالثاً : عدد الأسر التى يزيد دخلها عن ٤٠٠ جنيه (٢١٦)

(٧) إذا كانت درجات الإحصاء فى إحدى الكليات يتبع توزيع طبيعي بمتوسط ٧٥ درجة وانحراف معيارى ١٠ درجات . ووجد أن ٦.٦٨% من الطلاب حصلوا على تقدير ممتاز . أوجد أقل درجة يحصل عليها الطالب ليكون تقديره ممتاز (٩٠)

الارتباط

* تعريف الارتباط

الارتباط بين ظاهرتين أو كميتين متغيرتين معناه وجود علاقة بينهما بحيث إذا تغيرت أحدهما إلى التغير في اتجاه معين فإن الأخرى تميل إلى التغير في اتجاه معين أيضا .
ويقاس مدى الارتباط بين الظاهرتين بحساب (معامل الارتباط) ويرمز له بالرمز r حيث

$$-1 \leq r \leq 1 \text{ أو } r \in [-1, 1]$$

* أنواع الارتباط

- (١) طردى: عندما تزداد الظاهرتين معا أو تنقصان معا مثل تغير طول عمود من الحديد تبعا لتغير درجة الحرارة التي يتعرض لها وتكون r موجبة $r \in [0, 1]$
- (٢) عكسى: إذا تغيرت إحدى الكميتين بالزيادة تغيرت الأخرى بالنقص مثل الارتباط الحادث بين حجم كمية من الغاز وضغطه عند ثبوت درجة الحرارة وتكون r سالبة $r \in [-1, 0]$

ملاحظات

- ١- إذا كان $r = 0$ لا ارتباط (منعدم)
- ٢- إذا كان $r = 1$ ارتباط طردى تام
- ٣- إذا كان $r = -1$ ارتباط عكسى تام

* درجات الارتباط:

- (١) منعدم $r = 0$ لا يوجد ارتباط
- (٢) ضعيف: $0 < r < 0.4$ أو $-0.4 < r < 0$ صفر.
- (٣) متوسط: $0.4 < r < 0.6$ أو $-0.6 < r < -0.4$
- (٤) قوى: $0.6 < r < 1$ أو $-1 < r < -0.6$

معامل ارتباط بيرسون:

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

حيث n عدد قيم كل من المتغيرين ولإيجاد معامل الارتباط بهذه الطريقة نكون جدولاً من h أعمدة وهى s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 ص، ص، ص، ص، ص
ملحوظة هامة: يمكن تبسيط الأعداد التي نتعامل معها بطرح قيمة معينة من جميع قيم s_1 أو s_2 أو كليهما أو قسمة جميع القيم على قيمة معينة دون أن يؤثر ذلك على قيمة معامل الارتباط الخطى لبيرسون
مثال ١:

من بيانات الجدول الآتي، أوجد معامل ارتباط بيرسون بين قيم s_1 ، s_2 ص مبيناً نوعه ودرجته.

س	٦	٥	٧	٨	١٠	٦	٧
ص	٤	٧	٥	٦	٨	٧	٨

الحل:

الحل: $n = 7$

ص	س	س ص	ص	س
١٦	٣٦	٢٤	٤	٦
٤٩	٢٥	٣٥	٧	٥
٢٥	٤٩	٣٥	٥	٧
٣٦	٦٤	٤٨	٦	٨
٦٤	١٠٠	٨٠	٨	١٠
٤٩	٣٦	٤٢	٧	٦
٦٤	٤٩	٥٦	٨	٧
٣٠٣	٣٥٩	٣٢٠	٤٥	٤٩

$$r = \frac{n \times \text{مج س ص} - (\text{مج س})(\text{مج ص})}{\sqrt{n \text{ مج س} - (\text{مج س})} \times \sqrt{n \text{ مج ص} - (\text{مج ص})}}$$

$$r = \frac{(45)(49) - 320 \times 7}{\sqrt{(45) - 303 \times 7} \times \sqrt{(49) - 359 \times 7}} = 0.34 \text{ (طردى ضعيف)}$$

مثال (٢):

من بيانات الجدول الآتى:

س	٥	١٠	٣	٨	٦	٧
ص	٤	٨	٢	٦	٤	٥

أوجد معامل ارتباط بيرسون.

الحل:

- بيرسون:

س	ص	س ص	س	ص
٥	٤	٢٠	٢٥	١٦
١٠	٨	٨٠	١٠٠	٦٤
٣	٢	٦	٩	٩
٨	٦	٤٨	٦٤	٦٤
٦	٤	٢٤	٣٦	٣٦
٧	٥	٣٥	٤٩	٤٩
٣٩	٢٩	٢١٣	٢٨٣	١٦١

$$r = \frac{n \times \text{مج س ص} - (\text{مج س})(\text{مج ص})}{\sqrt{n \text{ مج س} - (\text{مج س})} \times \sqrt{n \text{ مج ص} - (\text{مج ص})}}$$

$$r = \frac{(29)(39) - 213 \times 6}{\sqrt{(29) - 161 \times 6} \times \sqrt{(39) - 283 \times 6}} = 0.988 \text{ (طردى قوى)}$$

مثال (٣)

إذا كان $\text{مج س} = 14$ ، $\text{مج ص} = 9$ ، $\text{مج س ص} = 192$ ، $\text{مج س} = 2$ ، $252 =$ ،
 $\text{مج ص} = 171$ ، $\text{ن} = 7$ ،
أوجد : معامل الارتباط بيرسون .

$$\text{الحل : } r = \frac{\text{ن} \times \text{مج س ص} - (\text{مج س})(\text{مج ص})}{\sqrt{(\text{ن} \times \text{مج س} - (\text{مج س})^2)(\text{ن} \times \text{مج ص} - (\text{مج ص})^2)}} \\
r = \frac{7 \times 192 - (14)(9)}{\sqrt{(7 \times 14 - 14^2)(7 \times 9 - 9^2)}} = 0.9$$

تمارين (٦)

(١) إذا كان معمل الارتباط الخطى بين س ، ص هو ٠.٣٢ ، فأوجد معامل الارتباط الخطى بين المتغيرين س ، ص حيث $\text{س} = 25$ ، $\text{ص} = 10$. (٠.٣٢)

(٢) أوجد معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين قيم المتغيرين س ، ص حيث :
 $\text{مج س} = 40$ ، $\text{مج ص} = 35$ ، $\text{مج س ص} = 346$ ، $\text{مج ص} = 273$ ، $\text{مج س} = 164$ ،
 $\text{ن} = 6$ وحدد نوع الارتباط ودرجته (٠.٩٤- ، عكسى قوى)

(٣) أوجد معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين قيم المتغيرين س ، ص حيث :
 $\text{مج س} = 70$ ، $\text{مج ص} = 60$ ، $\text{مج س ص} = 536$ ، $\text{مج ص} = 406$ ، $\text{مج س} = 374$ ،
 $\text{ن} = 10$ وحدد نوع الارتباط ودرجته (١- ، عكسى تام)

(٤) فى دراسة إحصائية بين متغيرين س ، ص كانت البيانات التالية : متوسط قيم س = ٨ ومتوسط قيم ص = ١٠ ، $\text{مج س} = 80$ ، $\text{مج ص} = 870$ ، $\text{مج س ص} = 665$ ، $\text{مج ص} = 1400$.
أوجد معامل الارتباط الخطى بين قيم س ، ص (٠.٧ ، طردى قوى)

(٥) أوجد معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين قيم س ، ص من بيانات الجدول الآتى :

٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢	س
١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨	ص

(٠.٩٤٧٣ ، طردى قوى)

(٦) الجدول الآتى يبين الدخل الشهري س بالجنهات والمنصرف ص شهريا بالجنهات لستة أسر

٤٥٠	٦٠٠	٧٢٠	٣٥٠	٤٠٠	٥٠٠	س
٤٠٠	٥٦٠	٧٠٠	٣٢٠	٣٥٠	٤٠٠	ص

أولا : أوجد معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين قيم س ، ص .
ثانيا : كون جدول آخر للدخل س بمئات الجنيهات والمنصرف ص بمئات الجنيهات ثم أوجد معامل الارتباط الخطى لبيرسون بين س ، ص . ماذا تلاحظ (٠.٩٨٢٦ نفسه)

معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

*** معامل ارتباط الرتب لسبيرمان**

في هذه الطريقة نوجد معامل الارتباط بين رتب القيم (سواء كانت عددية أو وصفية)، وليس بين القيم نفسها.

خطوات الحل :

- (١) نحدد رتب كل من المتغيرين بنفس الترتيب (تنازلياً معاً أو تصاعدياً معاً). مع ملاحظة أنه إذا اشترك اثنان أو أكثر في رتبة تعطى لكل منهما المتوسط الحسابي لهذه الرتب
- (٢) نكون جدولاً من أربعة أعمدة وهي: رتب س، رتب ص، ف، ف^٢ حيث ف تعنى الفرق المطلق بين الرتب.

$$(٣) \text{ نستخدم القانون: } r = 1 - \frac{6 \times \text{مجم ف}^2}{n(n-1)}$$

حيث ن عدد الأزواج المرتبة ، ف تعنى الفرق المطلق بين الرتب.
مثال ١:

من بيانات الجدول الآتي:

س	ممتاز	جيد	جيد جداً	مقبول	ضعيف	جيد
ص	جيد	ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد جداً	مقبول

احسب معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين س، ص.

الحل : $n = 6$

رتب س	رتب ص	ف	ف ^٢
١	٣	٢-	٤
٣.٥	٦	٢.٥-	٦.٢٥
٢	٤.٥	٢.٥-	٦.٢٥
٥	١	٤	١٦
٦	٢	٤	١٦
٣.٥	٤.٥	١-	١
—	—	صفر	٤٩.٥

$$r = 1 - \frac{49.5 \times 6}{(6 - 36) 6} = -0.41 \text{ عكسى}$$

مثال (٢) :

من بيانات الجدول الآتي:

س	٥	١٠	٣	٨	٦	٧
ص	٤	٨	٢	٦	٤	٥

أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.

الحل :

رتب س	رتب ص	ف	ف ^٢
-------	-------	---	----------------

٠.٢٥	٠.٥	٢.٥	٢
-	-	٦	٦
-	-	١	١
-	-	٥	٥
٠.٢٥	٠.٥	٢.٥	٣
-	-	٤	٤
٠.٥	صفر	—	—

$$r = 1 - \frac{0.5 \times 6}{(1 - 36) 6} = 0.9857 \text{ (طردى قوى)}$$

تمارين (٧)

(١) من بيانات الجدول التالى أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه ودرجته :

٩	١٢	١١	١٤	١٠	١٢	س
١٥	٢٠	١٩	٢٣	١٧	١٨	ص

(٠.٩ ، طردى قوى)

(٢) من بيانات الجدول التالى أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه ودرجته :

١١	٢٠	١٠	١٣	١٦	١٨	س
١٦	١٢	٩	١٥	١٢	٧	ص

(٠.٢٤- ، عكسى ضعيف)

(٣) من بيانات الجدول التالى أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين المتغيرين س ، ص وحدد نوعه ودرجته :

١٥	٢٥	٣٥	٣٥	٣٥	٢٥	١٥	س
٥	٨	٧	٨	٩	٦	٦	ص

(٠.٧٩ ، طردى قوى)

(٤) الجدول التالى يبين تقديرات ٦ طلاب فى مادتي الإحصاء والرياضيات أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

مقبول	مقبول	جيد جداً	ممتاز	جيد جداً	مقبول	س
ضعيف	جيد	ممتاز	جيد جداً	جيد	جيد	ص

(٠.٧٦)

(٠.٦٣)

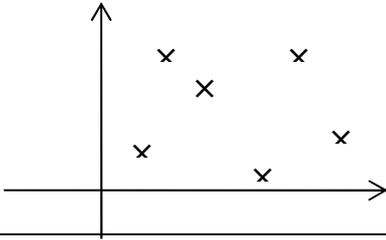
(٥) من بيانات الجدول الآتى أوجد معامل ارتباط الرتب لسبيرمان

ممتاز	جيد	مقبول	جيد	مقبول	ممتاز	س
جيد جداً	جيد	جيد	مقبول	مقبول	جيد	ص

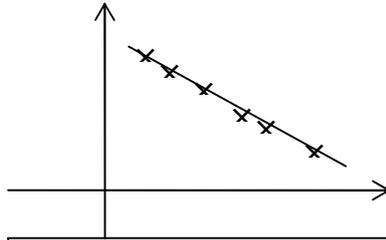
الانحدار

* شكل الانتشار

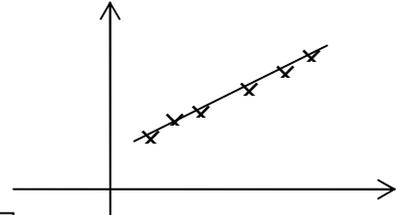
هو مجموعة منفصلة من النقط (أزواج مرتبة بين س، ص) ممثلة بيانياً في المستوى حيث يمثل المحور الأفقى قيم أحد المتغيريين وليكن س ويمثل المحور الرأسى قيم المتغير الآخر ص فنحصل على شكل يوضح انتشار النقط في المستوى يسمى شكل الانتشار وباستخدام طريقة المربعات الصغرى، يمكن إيجاد معادلات الانحدار.



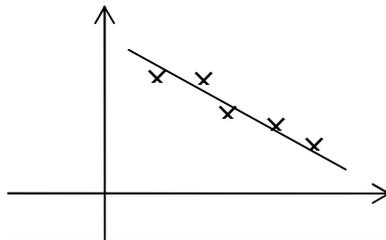
النقط تنتشر في المستوى دون روابط $r = 0$ الارتباط منعدم



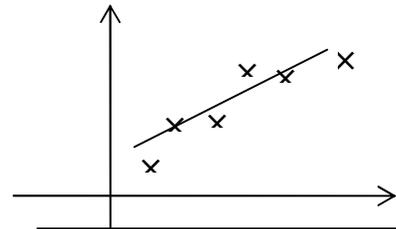
النقط \ni لخط مستقيم ميله سالب $r = -1$ الارتباط عكسى تام



النقط \ni لخط مستقيم ميله موجب $r = 1$ الارتباط طردى تام



النقط تقع حول مستقيم ميله سالب $r = -$ الارتباط عكسى



النقط تقع حول مستقيم ميله موجب $r = +$ الارتباط طردى

إذا كان الارتباط قوياً قربت قيم المتغيرين من خط مستقيم يمثل العلاقة بينهما يسمى خط الانحدار

* معادلة خط انحدار ص على س (لتقدير قيمة ص عند أى قيمة لـ س)
ص = m س + ب حيث m ميل المستقيم (معامل انحدار ص على س)،
ب هو طول الجزء الذى يقطعه المستقيم من المحور الرأسى

$$\text{حيث } m = \frac{ن \text{ مـجـ ص} - (مـجـ س) (مـجـ ص)}{ن \text{ مـجـ س} - (مـجـ س)^2}, \quad ب = \frac{مـجـ ص - m \text{ مـجـ س}}{ن}$$

* معادلة خط انحدار س على ص (لتقدير قيمة س عند أى قيمة لـ ص)
س = j ص + د

$$ج = \frac{ن \text{ مـجـ س} - (مـجـ س) (مـجـ ص)}{ن \text{ مـجـ ص} - (مـجـ ص)^2}, \quad د = \frac{مـجـ س - j \text{ مـجـ ص}}{ن}$$

ملاحظة : لتقدير قيمة ص إذا علمت قيمة س : نوجد معادلة خط انحدار ص على س
و لتقدير قيمة س إذا علمت قيمة ص : نوجد معادلة خط انحدار س على ص

العلاقة بين معامل الارتباط ومعاملى الانحدار

$$r = \frac{m}{j}$$

حيث " r " تأخذ نفس إشارة كل من m ، j .

ملحوظة : (١) عندما p موجبة ، J موجبة تكون $r = \sqrt{pJ}$
 (٢) عندما p سالبة ، J سالبة تكون $r = -\sqrt{pJ}$

أمثلة : مثال ١

١- إذا كان معامل انحدار V على S هو -0.25 ، معامل انحدار S على V هو -0.81 .
 أوجد معامل الارتباط الخطي بين S ، V وحدد نوعه.

الحل

$$\begin{aligned} p &= -0.25 & J &= -0.81 \\ r^2 &= p \times J = -0.25 \times -0.81 = 0.2025 \\ r &= \sqrt{0.2025} = 0.45 \end{aligned}$$

∴ $r = -0.45$ ارتباط عكسي متوسط.

مثال (٢)

إذا كان معامل انحدار S على V هو 1.21 ، معامل الارتباط الخطي بين S ، V هو 0.33 أوجد معامل انحدار V على S .

الحل : $r^2 = p \times J$ ، $r = 0.33$ ، $J = 1.21$
 $p = \frac{r^2}{J} = \frac{0.33^2}{1.21} = 0.09$ ∴ $p = 0.09$

مثال ٣ :

من بيانات الجدول الآتي:

س	١	٣	٤	٤	٦	٧	٩
ص	٦	٤	٤	٤	٣	٢	١

- (أ) قدر قيمة S عندما $V = 5$ باستخدام معادلة انحدار مناسبة.
 (ب) أوجد معادلة خط انحدار V على S .
 (ج) أوجد معامل الارتباط الخطي بين S ، V باستخدام معاملي الانحدار.
 (د) أوجد معامل ارتباط بيرسون.
 (هـ) قارن بين النتيجة في ج ، د.

الحل

س	ص	س ص	س ^٢	ص ^٢
١	٦	٦	١	٣٦
٣	٤	١٢	٩	١٦
٤	٤	١٦	١٦	١٦
٦	٣	١٨	٣٦	٩
٧	٢	١٤	٤٩	٤
٩	١	٩	٨١	١
٣٠	٢٠	٧٥	١٩٢	٨٢

ن = ٦ ، خط الانحدار المناسب هو انحدار S على V
 (أ) $S = J \times V + D$ ، $J = \frac{N \times \text{مجس ص} - (\text{مجس ص}) (\text{مجس ص})}{N \text{ مجص ص} - (\text{مجص ص})^2}$

$$ج = \frac{(20)(30) - 75 \times 6}{(20) - 82 \times 6} = 1.63$$

$$د = \frac{مجس - مجص}{ن} = \frac{(20)(1.63) + 30}{6} = 10.43$$

المعادلة هي : ن

$$س = 1.63 - ص = 10.43 + ص \quad \text{عندما ص} = 5 \text{ فإن س} = 1.63 + 5 \times 1.63 = 10.63$$

(ب) معادلة خط انحدار ص على س هي ص = م + س

$$م = \frac{ن \text{ مجس} - \text{مجص} (مجس)}{ن \text{ مجس} - (مجس)^2}$$

$$م = \frac{(20)(30) - 75 \times 6}{(30) - 192 \times 6} = 0.595$$

$$ب = \frac{(30)(0.595) + 20}{6} = 6.31$$

∴ معادلة خط انحدار ص على س هي ص = 0.595س + 6.31

(ج) $م = 0.595 \times 1.63 = 0.98$

(د) $م = \frac{ن \times \text{مجس} - \text{ص} (مجس)}{\sqrt{ن \text{ مجس} - (مجس)^2} \times \sqrt{ن \text{ مجص} - (مجص)^2}}$

$$م = \frac{(20)(30) - 75 \times 6}{\sqrt{(20) - 82 \times 6} \times \sqrt{(30) - 192 \times 6}} = 0.98$$

(هـ) قيم ر الناتجة في ج ، د متساويتين.

مثال (٤)

إذا كان $مجس = 50$ ، $مجص = 60$ ، $مجس ص = 361$ ، $مجس^2 = 310$ ،
 $مجص^2 = 498$ ، $ن = 10$ ،

أوجد

أ- معادلة خط انحدار ص على س

ب- تقدير قيمة س عندما ص = 8

الحل: معادلة انحدار ص على س هي : ص = م + س

$$م = \frac{ن \text{ مجس} - \text{مجص} (مجس)}{ن \text{ مجس} - (مجس)^2} = \frac{(60)(50) - 361 \times 10}{(50) - 310 \times 6} = \frac{61}{60}$$

$$ب = \frac{مجص - م \text{ مجس}}{ن} = \frac{(50) - (\frac{61}{60}) \times 60}{10} = 0.92$$

∴ معادلة خط انحدار ص على س هي : ص = 0.92س + 6.1

ب معادلة خط انحدار س على ص : س = ج + د

$$\frac{61}{138} = \frac{(60)(50) - 361 \times 10}{(60)^2 - 498 \times 6} = \frac{\text{ن مجس ص} - (\text{مجس})(\text{مجص})}{\text{ن مجص}^2 - (\text{مجص})^2}$$

$$2.35 = \frac{(60)(138/61) - 50}{10} = \frac{\text{مجس} - \text{مجص}}{\text{ن}}$$

المعادلة : $\frac{61}{138} = \text{س} + \text{ص} + 2.35$ عندما $\text{ص} = 8$
 فإن $\text{س} = \frac{61}{138} - 2.35 + 8 = 0.89$
 تمارين (٨)

(١) إذا كان معامل انحدار ص على س هو ١.٢١، معامل انحدار س على ص هو ٠.٦٧٦ أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س، ص وحدد نوعه (٠.٩١)

(٢) إذا كانت معادلة خط انحدار ص على س هي $\text{ص} = -1.2 + 0.43\text{س}$ ، و معادلة خط انحدار س على ص هي $\text{س} = -0.25 + 1.47\text{ص}$. أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س، ص وحدد نوعه (٠.٥٥-)

(٣) في دراسة العلاقة بين متغيرين س، ص وجد أن معامل انحدار ص على س هو ٠.٦، ومعامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س، ص = ٠.٩ أوجد معامل انحدار س على ص (١.٣٥)

(٤) في دراسة للعلاقة بين المتغيرين س، ص وجد أن :
 مجس = ١٥، مجص = ٣٠، مجس ص = ١٠٥، مجس^٢ = ٥٥، ن = ٥
 أوجد معادلة انحدار ص على س (ص = ١.٥ + ١.٥)

(٥) من بيانات الجدول التالي

٨	١٤	١٢	١٥	١٢	١٠	س
٥	٩	٦	٦	٨	٦	ص

أولاً : أوجد معامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س، ص وحدد نوعه (٠.٥٥٢٩ طردى)
 ثانياً : أوجد معادلة خط انحدار مناسب لحساب قيمة س عندما $\text{ص} = 38$ (٤١.٢٨)

(٦) إذا كان : مجس = ٦٠، مجص = ٧٠، مجس ص = ٤٢٠، مجص^٢ = ٥٩٨، مجس ص = ٣٧١، ن = ١٠. أوجد :
 (١) ومعامل الارتباط الخطي لبيرسون بين س، ص
 (٢) معادلة خط انحدار ص على س
 (٣) استنتج مما سبق قيمة معامل انحدار س على ص (ج = -٠.٤٥٥)

تمت بحمد الله